MATHEGAMI
Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de Dezember 2009

Quadrate[1]

Michael Schmitz

Zusammenfassung

Beim Falten von Papier wird häufig quadratisches Papier als Ausgangsmaterial benutzt. Zu diesem Zweck gibt es eine Vielzahl quadratischer Faltblätter in unterschiedlichen Farben, Größen und aus verschiedenen Materialien zu kaufen.

Oft reicht es aber auch aus, wenn man sich quadratisches Papier aus normalem Kopierpapier (DIN A4) selbst zuschneidet. Für unsere Zwecke hat dieses Papier sogar mehrere Vorteile: Es ist fast immer verfügbar, 'Schmierpapier' kann verarbeitet werden, die Papiergröße eignet sich gut zum Experimentieren und man kann gut auf diesem Papier schreiben und zeichnen. Dies ist manchmal sinnvoll, um Faltlinien deutlicher hervorzuheben oder um sich Zusammenhänge klarzumachen.

In diesem Beitrag wird auf verschiedene Weise gezeigt, wie man solches quadratisches Faltpapier selber herstellen kann. In Variante 1 und 3 spielt rechteckiges Ausgangspapier, in der Variante 3 speziell DIN A4-Papier eine Rolle. In der Variante 2 wird aus unregelmäßig geformtem Papier ein Quadrat gefaltet.

Natürlich geht es auch um das Begründen, dass die gefalteten Vierecke tatsächlich Quadrate sind. Für die Varianten 1 bzw. 2 kann dies bereits durch Schüler in der Grundschule erfolgen. Beim Nachweis, dass das Viereck nach Variante 3 ein Quadrat ist, ist der Satz des Pythagoras hilfreich.

An das Falten eines Quadrates nach Variante 3 schließen weitere Betrachtungen an, die zeigen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Außerdem wird eine Kettenbruchentwicklung für diese Zahl angegeben.

Schließlich wird in Variante 4 gezeigt, wie man ein Quadrat ohne Faltlinie im Innern erreichen kann.

Auch die Umkehrung, ein Rechteck, welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, aus einem Quadrat herzustellen, wird untersucht. Dabei ergeben sich interessante Zusammenhänge, die zum Falten eines regelmäßigen Achtecks führen und verschiedene Berechnungen ermöglichen. Neben Kenntnissen aus der Kongruenz- und Ähnlichkeitsgeometrie kann das Arbeiten mit linearen Funktionen sinnvoll eingebunden werden. So ergeben sich vielfältige Untersuchungs- und Übungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht. Auch entdeckendes Lernen und Problemlösen kann an den hier vorgestellten Beispielen für den Mathematikunterricht interessant sein.

Variante 1

Hier wird eine allgemein bekannte Variante gezeigt, wie man aus einem DIN A4-Blatt ein Quadrat herstellen kann. Dazu faltet man die kurze Kante AB des Rechtecks auf die lange Kante AD, sodass die Faltlinie durch A geht (Bild 1a). Dabei geht B in B' auf AD über und die Faltlinie markiert auf BC den Punkt E.

Nun kann man entlang EB' den überstehenden Teil des Ausgangspapiers abtrennen und nach dem Auffalten erhält man ein Quadrat ABEB'.

Dass ABEB' tatsächlich ein Quadrat ist, kann leicht eingesehen werden (Bild 1c). Dabei ist es von Bedeutung, dass das Ausgangspapier ein Rechteck ist, also in den vier Ecken A, B, C und D jeweils ein rechter Winkel liegt.

[1] Erweiterte Fassung des gleichnamigen Beitrages aus *Der Mathematikunterricht*, Heft 6, 2009.

Durch die Faltung von B nach B' überträgt sich der rechte Winkel von B in den von B', womit B'E parallel zu AB ist. Folglich ist, weil auch nach Voraussetzung AB' parallel zu BE ist, ABEB' ein Rechteck. Da wegen der Faltung von B nach B' auch AB und AB' gleichlang sind, ist dieses Rechteck ein Quadrat.

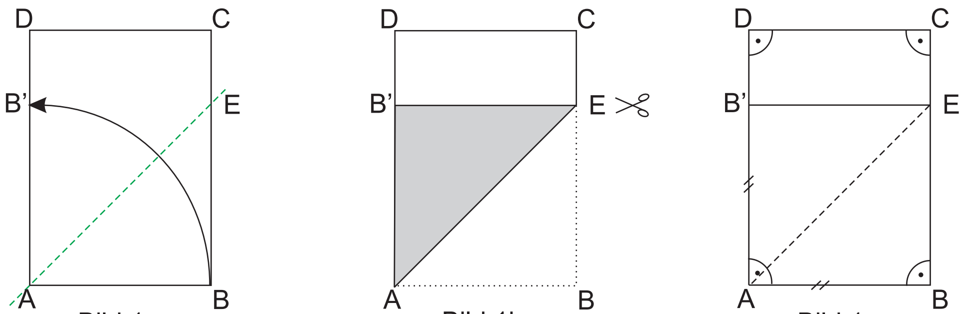

Bild 1a Bild 1b Bild 1c

Abschließend sei bemerkt, dass es bei den obigen Überlegungen keine Rolle gespielt hat, dass das Ausgangspapier ein DIN A4-Blatt war. Man kann also auf diese Weise aus jedem rechteckigen Papier ein quadratisches Faltpapier herstellen.

Variante 2

Nun wird ein Quadrat aus einem unregelmäßigen Papier hergestellt. Dazu wird das Papier an einer beliebigen Stelle gefaltet, sodass eine Faltlinie entsteht (Bild 2a). Auf dieser Faltlinie werden zwei Punkte A und B beliebig festgelegt. Die Länge der Strecke AB ist dann die Seitenlänge des Quadrates. Das bedeutet aber auch, dass man beim Festlegen der beiden Punkte aufpassen muss, damit das Quadrat auch auf das Papier passt.

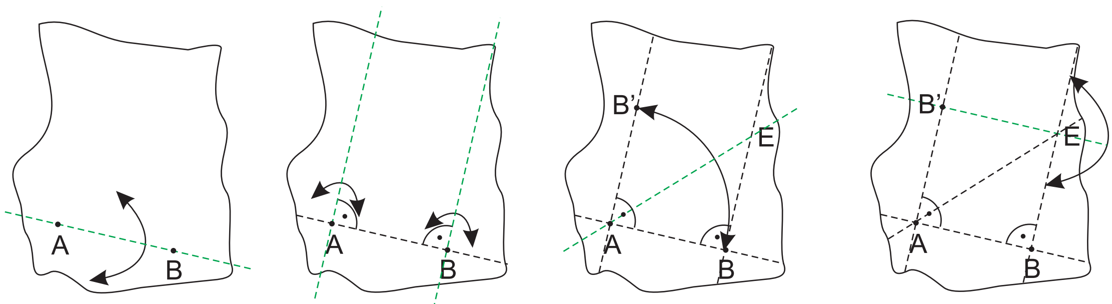

Bild 2a Bild 2b Bild 2c Bild 2d

Nun faltet man so durch A, dass die Faltlinie AB auf sich zu liegen kommt. Dadurch entsteht eine Faltlinie durch A, die auf AB senkrecht ist. Ebenso wird die zu AB senkrechte Faltlinie durch B gefaltet. Dann sind auf dem Papier drei Faltlinien zu sehen, die bei A und B jeweils rechte Winkel bilden und an einen Teil eines Rechtecks erinnern. Deshalb faltet man jetzt entsprechend der 1. Variante weiter. Es wird B auf die Senkrechte von AB durch A so gefaltet, dass die Faltlinie durch A geht (Bild 2c). Diese Faltlinie markiert auf der anderen Senkrechten zu AB den Punkt E. Nachdem man des Papier wieder aufgefaltet hat, wird so durch E gefaltet, dass die Faltlinie BE auf sich zu liegen kommt (Bild 2d). Nachdem auch diesmal wieder das Papier aufgefaltet wurde, erkennt man im unregelmäßigen Papier ein Quadrat.

Eine Begründung dafür, dass es sich tatsächlich um ein Quadrat handelt, ist hier nicht nötig. Er ergibt sich aus den Überlegungen der Variante 1.

Das gefaltete Quadrat kann nun ausgeschnitten werden, oder man faltet die unregelmäßigen Papierkanten nach 'hinten' um, sodass ein 'sauberes' Quadrat übrig bleibt.

Variante 3

Nun ist DIN A4-Papier die Grundlage für das Falten eines Quadrates. Mit den Bezeichnungen aus Bild 3a faltet man so, dass D auf der Rechteckseite BC zu liegen kommt und die Faltlinie dabei durch A geht. D' ist das Bild von D auf BC bei dieser Faltung.

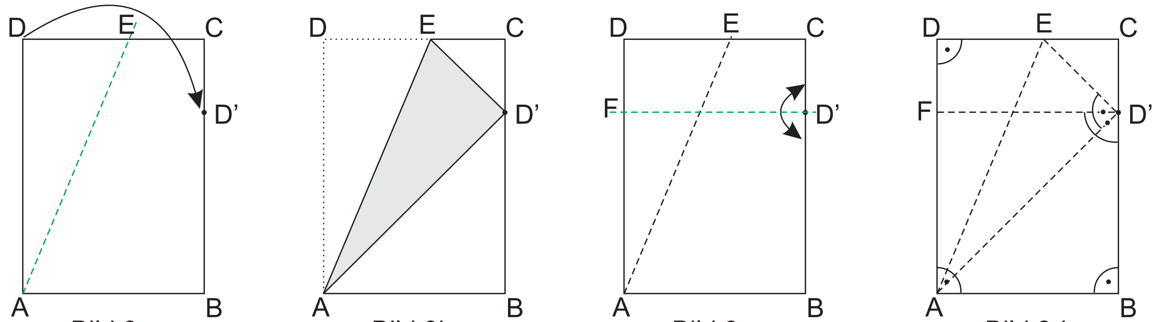

Bild 3a Bild 3b Bild 3c Bild 3d

Diese Faltlinie markiert auch auf CD den Punkt E. Nach dem Auffalten wird C so auf BC gefaltet, dass die Faltlinie durch D' geht. Diese Faltlinie markiert auf AD den Punkt F. Faltet man das Papier wieder auseinander, so erkennt man das Quadrat ABD'F.

Wegen der Faltung von C auf BD' ist $|\sphericalangle BD'F| = 90^0$ (Bild 3d). Damit ist aber ABD'F ein Rechteck. Um zu zeigen, dass ABD'F auch ein Quadrat ist, muss man z.B. nur noch $|AB| = |BD'|$ nachweisen. Diese Gleichheit ergibt sich aus einer Eigenschaft des DIN A4-Papiers (vergleiche [?]). Es ist nämlich $|AD| = |AB| \cdot \sqrt{2}$.
Da sich beim Falten von D nach D' auch $|AD'| = |AD|$ ergibt, folgt mit dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck ABD': $|BD'| = \sqrt{|AD'|^2 - |AB|^2} = \sqrt{2 \cdot |AB|^2 - |AB|^2} = \sqrt{|AB|^2} = |AB|$. Damit ist aber ABD'F ein Quadrat.

Weitere Betrachtungen

Mit der Faltung aus der Variante 3 kann man nun weiter arbeiten und z.B. die Größen von Winkeln bestimmen, die in der Figur auftreten (Bild 4).
Ausgehend davon, dass ABD'F ein Quadrat ist, ergibt sich $|\sphericalangle D'AB| = |\sphericalangle BD'A| = |\sphericalangle AD'F| = 45^0$. Dann ist auch $|\sphericalangle FAD'| = 45^0$ und wegen der Faltung von D nach D' ergibt sich $|\sphericalangle SAD'| = |\sphericalangle FAS| = 22{,}5^0$. Dabei bezeichnet S den Schnittpunkt der Faltlinien AE und FD'.
Über die Winkelsumme in rechtwinkligen Dreiecken erhält man $|\sphericalangle ASF| = |\sphericalangle AED| = 67{,}5^0$ und findet $|\sphericalangle ESD'| = 67{,}5^0$ (Scheitelwinkel). Damit erhält man aber auch $|\sphericalangle D'SA| = |\sphericalangle FSE| = 112{,}5^0$.
Weil $|\sphericalangle EDA| = 90^0$ und $|\sphericalangle AD'F| = 45^0$ ist, ergibt sich wegen der Faltung von D nach D' $|\sphericalangle SD'E| = 45^0$ und somit auch $|\sphericalangle ED'C| = |\sphericalangle CED'| = 45^0$. Damit ist das rechtwinklige Dreieck D'CE gleichschenklig mit $|CE| = |CD'|$. Außerdem ergibt sich in E, dass $|\sphericalangle D'ES| = 67{,}5^0$ ist, womit auch das Dreieck SD'E gleichschenklig mit $|D'S| = |D'E|$ ist.

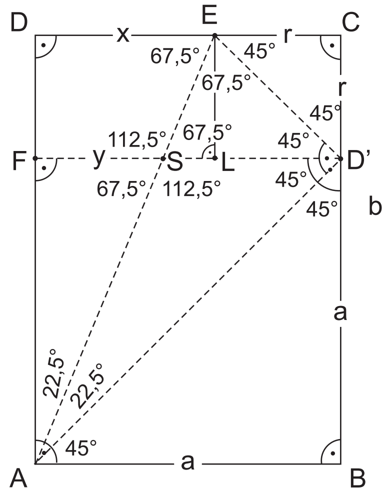

Bild 4

Weil $|CE| = |CD'|$ und der Winkel bei C ein rechter Winkel ist, ist LD'CE ein Quadrat, wobei L der Fußpunkt des Lotes von E auf FD' ist. Damit wird das Ausgangsrechteck ABCD (ein DIN A4-Blatt) in zwei Quadrate und ein Rechteck FLED eingeteilt. Von diesem Rechteck soll nun das Verhältnis der Seiten berechnet werden.

Zur besseren Übersicht werden die folgenden Abkürzungen eingeführt: $|AB| = |CD| = a$, $|AD| = |BC| = b$, $|CD'| = |CE| = r$ und $|DE| = x$.
Weil ABCD ein DIN A4-Blatt ist, gilt: $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$. Folglich ergibt sich: $\sqrt{2} = \frac{b}{a} = \frac{a+r}{a} = \frac{r+x+r}{r+x} = \frac{2r+x}{r+x}$, woraus $\sqrt{2}(r+x) = 2r + x$ folgt. Es ist also:
$\sqrt{2}r + \sqrt{2}x = 2r + x$,

$(\sqrt{2}-1)x = (2-\sqrt{2})r,$

$\frac{x}{r} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}$, also $\frac{x}{r} = \sqrt{2}$.

Damit ist im Rechteck FLED das Seitenverhältnis genau so groß wie im Ausgangsviereck, einem DIN A4-Blatt. FLED ist folglich ein Rechteck, das zu einem DIN A4-Blatt ähnlich ist. Dies ist eine weitere interessante Eigenschaft unseres üblichen Schreibpapiers: Durch zweimaliges Abschneiden eines Quadrates von einem DIN A4-Blatt erhält man ein neues Rechteck, das zum Ausgangsrechteck ähnlich ist.
Es gilt allgemein:

> Schneidet man von einem Rechteck, das zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, das Quadrat über einer kurzen Seite und anschließend vom übrig gebliebenen Rechteck ebenfalls das Quadrat über einer kurzen Seite ab, so erhält man ein Rechteck, welches zum Ausgangsrechteck ähnlich ist.

Als weiterführende Problemstellung könnte man fragen, ob es noch weitere Papierformate mit dieser Eigenschaft gibt.

Nun soll der Ähnlichkeitsfaktor der beiden Rechtecke ABCD und FLED bestimmt werden. Dazu kann man das Verhältnis $\frac{x}{a}$ bestimmen (Bild 4).
Weil das Ausgangsrechteck zu einem DIN A4-Blatt ähnlich ist, gilt $a + r = a\sqrt{2}$. Bedenkt man, dass $r = a - x$ ist, so ergibt sich $a + a - x = a\sqrt{2}$, woraus $x = (2-\sqrt{2})a$ folgt. Damit ist aber $2-\sqrt{2}$ der gesuchte Ähnlichkeitsfaktor.

Zum Abschluss soll noch die Länge $|FS| = y$ bestimmt werden. Dazu eignet sich der Strahlensatz mit den beiden von A ausgehenden Strahlen AD und AE und den beiden Parallelenabschnitten x und y. Es gilt $\frac{x}{y} = \frac{|AD|}{|AF|} = \sqrt{2}$. Weil aber das Rechteck FLED zu einem DIN A4-Blatt ähnlich ist, gilt $\frac{x}{r} = \sqrt{2}$. Folglich ist $y = r$ und die beiden Trapeze FSED und CESD' sind kongruent zueinander.

$\sqrt{2}$ ist irrational

Ausgehend von einem DIN A4-Blatt wurde, wie eben gezeigt, durch das Abschneiden von zwei Quadraten ein kleines Rechteck erzeugt, das zum Ausgangsrechteck ähnlich ist. Dieses Verfahren kann auch auf dieses kleinere Rechteck angewendet werden, wodurch ein weiteres, noch kleineres Rechteck entsteht, das zum DIN A4-Blatt ähnlich ist. Auch von diesem Rechteck lassen sich wieder zwei Quadrate abschneiden, ... Dieser Prozess kann (theoretisch) beliebig lange fortgesetzt werden. Im Bild 5 sind die ersten vier Schritte gezeigt. r, r_1, r_2, r_3, ... bezeichnen dabei die Längen der kurzen Rechteckseiten. In [1] wird gezeigt, dass sich dieses Verfahren eignet, um zu zeigen, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Das Verfahren kann nämlich als euklidischer Algorithmus aufgefasst werden, um den größten gemeinsamen Teiler der Längen b und a der Seiten eines DIN A4-Blattes zu bestimmen.

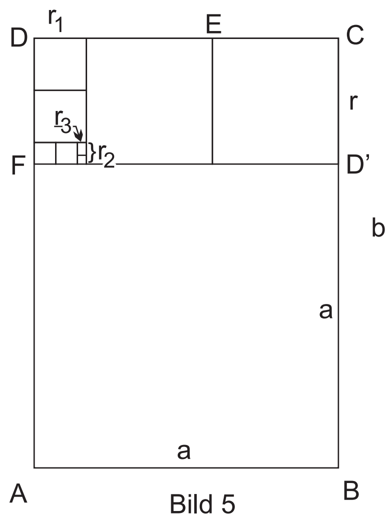

Bild 5

Es gilt:
(1) $b = 1 \cdot a + r$,
(2) $a = 2 \cdot r + r_1$,
(3) $r = 2 \cdot r_1 + r_2$,
(4) $r_1 = 2 \cdot r_2 + r_3$,
... .

Da dieser Prozess nicht abbricht, d.h. kein Rest Null wird, haben b und a keinen gemeinsamen Teiler. Dies bedeutet aber, dass b und a kein gemeinsames Maß haben und folglich $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ irrational ist.

Mit Hilfe des euklidischen Algorithmus lässt sich $\sqrt{2}$ auch als Kettenbruch darstellen und damit näherungsweise berechnen. Da $\sqrt{2} = \frac{b}{a}$ ist, ergibt sich aus (1) nach Division durch a:

$\sqrt{2} = \frac{b}{a} = 1 + \frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{r}}$.

$\frac{a}{r}$ erhält man aber aus (2) nach Division durch r:

$\frac{a}{r} = 2 + \frac{r_1}{r} = 2 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}}$. Damit folgt

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{r}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{r}{r_1}}} .$$

Mit (3) erhält man:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}} ,$$

und mit (4) folgt:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}}} .$$

Auch dieser Prozess endet nicht, sodass man nun für $\sqrt{2}$ einen unendlichen Kettenbruch angeben kann. Bereits in der 4. Näherung erhält man:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1,41\overline{6} .$$

Variante 4

Die vorher beschriebenen Faltvarianten für ein Quadrat aus einem DIN A4-Papier haben den Nachteil, dass im Quadrat immer eine Faltlinie vorhanden ist. Nun soll aus DIN A4-Papier ein Quadrat hergestellt werden, das keine Faltlinie in seinem Inneren enthält. Dazu sind allerdings zwei DIN A4-Blätter nötig. Ein Blatt ist gegenüber dem anderen um 90^0 gedreht und beide Blätter werden an einer Ecke Kante an Kante bündig übereinander gelegt (Bild 6a). Nun faltet man die beiden überstehenden Rechtecke entlang der Papierkante des jeweils anderen Blattes um. So erhält man in beiden DIN A4-Blättern jeweils ein Quadrat ABYH (Bild 6b), welche keine inneren Faltlinien enthalten.

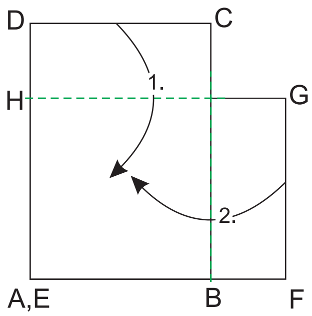

Bild 6a

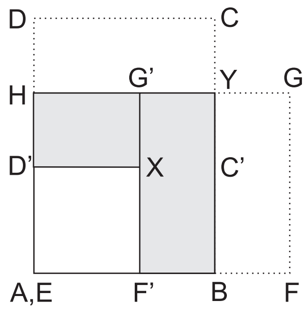

Bild 6b

Zeichnet man auch die Kanten F'X und XD' z.B. mit einem Bleistift auf dem oberen Blatt nach, so erhält man dort ein weiteres, kleineres Quadrat AF'XD'.

Die Begründung dafür, dass es sich in beiden Fällen um Quadrate handelt (gleichlange Seiten und rechte Innenwinkel) kann man auch von Schülern in der Grundschule erwarten.

Natürlich ist klar, dass es bei dieser Faltung nicht wichtig ist, dass das verwendete Papier zu DIN A4-Papier ähnlich ist. Es funktioniert auch mit zwei zueinander kongruenten Rechtecken. Wenn dabei die längere Kante kürzer als das Doppelte der kurzen Kante ist, dann gibt es auch das kleine Quadrat, das man auf das oben liegende Rechteck zeichnen kann.

Nun wird wieder vorausgesetzt, dass die beiden verwendeten Rechtecke ähnlich zu DIN A4-Papier sind. Man bezeichnet wie üblich die Länge der kurzen Seite mit a und die der langen Seite mit b. Dann gilt: $b = \sqrt{2}a$.
Nun soll die Kantenlänge des kleinen Quadrates AF'XD' berechnet werden. Es ist $|AF'| = a - (b - a)$ und damit wird $|AF'| = 2a - b = 2a - \sqrt{2}a = (2 - \sqrt{2})a$.

Dies ist aber gerade die Länge der längeren Kante des Rechtecks, welches beim zweimaligen Abschneiden eines Quadrates von einem DIN A4-Blatt nach Variante 3, übrig bleibt.

Eine Umkehrung

Bisher wurden Quadrate aus Rechtecken, speziell aus DIN A4-Papier hergestellt. Nun soll die umgekehrte Fragestellung untersucht werden. Wie kann man aus einem gegebenen Quadrat ein möglichst großes Faltpapier herstellen, das zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist?

Dazu betrachtet man ein Quadrat ABCD mit der Seitenlänge a. Zuerst wird angenommen, dass man ein Rechteck STUV, welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, im Quadrat gefunden hat. Im Bild 7 ist dieses Rechteck STUV so eingezeichnet, dass S=A und T=B ist. Es ist klar, dass ein Rechteck dieser Art mit einer größeren Fläche nicht möglich ist.
Nun wird überlegt, welche Eigenschaften sich daraus ergeben, und wie man anschließend eine Folge von Faltungen mit dem gewünschten Ziel entwickeln kann.

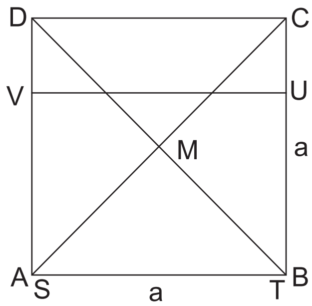

Bild 7

Weil STUV=ABUV zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, gilt: $\frac{|AB|}{|AV|} = \sqrt{2}$. Folglich ergibt sich $|AV| = \frac{|AB|}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Andererseits hat natürlich auch eine halbe Diagonale im Ausgangsquadrat die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$, also ist insbesondere $|AM| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, wobei M den Schnittpunkt der Diagonalen im Quadrat bezeichnet. Nun muss nur noch die Strecke AM auf die Quadratseite AD übertragen werden. Eine mögliche Faltfolge ist in den Bildern 8a bis 8d gezeigt, wobei beim Übergang von Bild 8c zu Bild 8d das umgefaltete Dreieck AD'E wieder aufgefaltet wird. Dabei geht die Faltmarkierung von M auf AD' in M' auf AD über. Abschließend wird noch DC um die Senkrechte auf AD durch M' gefaltet. Dadurch entsteht auf BC der Punkt G. ABGM' ist nun das gesuchte Rechteck, in dem $|AB| = |AM'|\sqrt{2}$ gilt und das damit zu einem DIN A4-Blatt ähnlich ist.

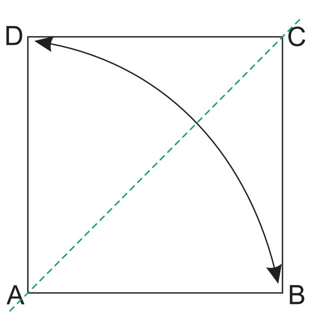

Bild 8a

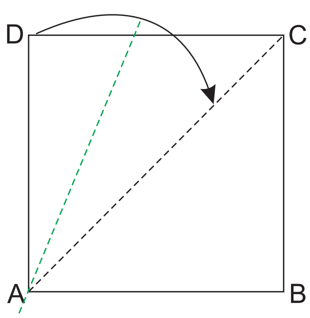

Bild 8b

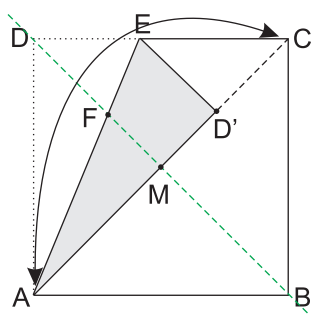

Bild 8c

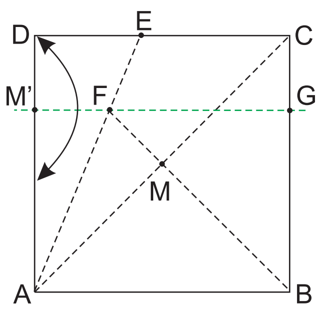

Bild 8d

Nun kann man entlang GM' das Quadrat teilen und erhält ein Rechteck ABGM', welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist.

Betrachtet man noch einmal das gesamte Quadrat ABCD, mit dem Rechteck ABGM', welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist (Bild 9). Dann fällt auf, dass aufgrund der Parallelität von M'G zu AB der Winkel $\sphericalangle M'FD$ die Größe 45^0 hat. Folglich ist das Dreieck DM'F gleichschenklig und es gilt

$|M'D| = |M'F|$. Demzufolge ist M'FF*D ein Quadrat, wenn F* der Fußpunkt des Lotes von F auf CD ist.

Bezeichnet H den Schnittpunkt von AC mit M'G und H* den Fußpunkt des Lotes von H auf DC, so ist auch HGC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|HG| = |GC|$ und folglich HGCH* ein Quadrat. Dieses Quadrat ist wegen $|HH^*| = |FF^*|$ kongruent zum Quadrat M'FF*D.
Damit wird das Rechteck M'GCD in zwei zueinander kongruente Quadrate und ein Rechteck FHH*F* eingeteilt. Nun sollen die Seitenlängen dieses Rechtecks berechnet werden. Dazu wird $|AB| = a$ gesetzt. Die gesuchten Seitenlängen werden mit r und s (Bild 10) bezeichnet.

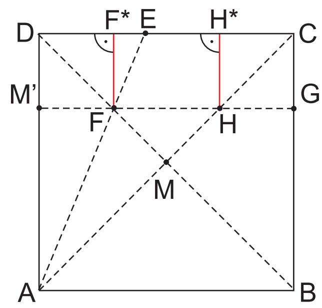

Bild 9

Weil $|M'D| = r$ und $|AM'| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ gilt, ergibt sich
$r = |AD| - |AM'| = a - \frac{a}{2}\sqrt{2} = a(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})$.
Damit folgt aber für $s = a - 2r = a - 2a(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}) = a(\sqrt{2} - 1)$.

Nun wird noch das Verhältnis der Seitenlängen dieses Rechtecks bestimmt.
Man erhält: $\frac{s}{r} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{a(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})}{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Damit ist aber das betrachtete Rechteck zu einem DIN A4-Papier ähnlich, und es gilt:

> Schneidet man von einem Quadrat ein Rechteck ab, das zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, bleibt ein Rechteck übrig. Dieses Rechteck lässt sich in zwei zueinander kongruente Quadrate und ein Rechteck, welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, einteilen.

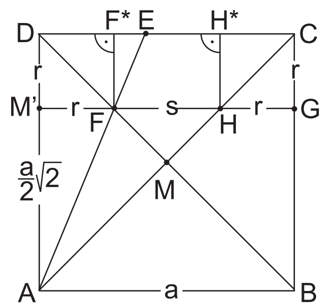

Bild 10

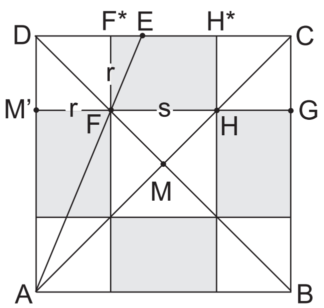

Bild 11a

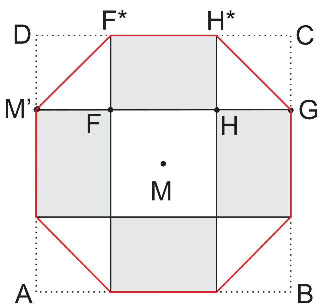

Bild 11b

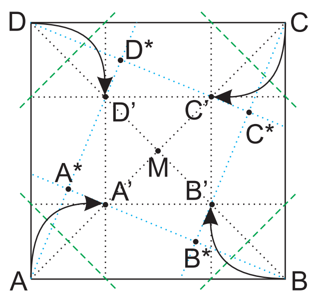

Bild 12a

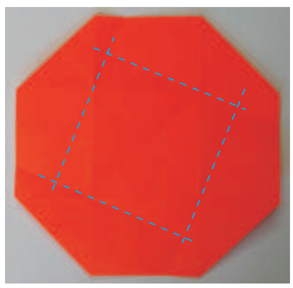

Bild 12b

Bisher wurde vom Quadrat ABCD das Rechteck, welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, an der Seite AB abgeschnitten, sodass sich an der Seite CD das 'Restrechteck' bildet. Dieses Verfahren kann man an jeder Quadratseite durchführen. Es entsteht eine Einteilung des Ausgangsquadrates wie sie in Bild 11a zu sehen ist. Im Innern entsteht ein kleineres Quadrat mit der Seitenlänge s. An jeder Seite dieses inneren Quadrates ist ein Rechteck, welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, angelegt. Außerdem liegt in jeder Ecke des Ausgangsquadrates ein kleines Quadrat mit der Seitenlänge r. Verbindet man die äußeren Ecken der kleinen Rechtecke, so erhält man ein Achteck, wie es im Bild 11b gezeigt ist. Um zu zeigen, dass es sich um ein regelmäßiges Achteck handelt, muss man nur noch die Länge der Seite M'F* berechnen und diese mit der Länge von F*H* vergleichen: $|M'F^*|^2 = r^2 + r^2$, woraus $|M'F^*| = r\sqrt{2} = a(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1) = s = |F^*H^*|$ folgt. Da auch alle Innenwinkel des Achtecks die Größe $90^0 + 45^0 = 135^0$ haben, ist dieses Achteck eine regelmäßiges Achteck.

Damit ergibt sich aber auch gleich eine Anleitung, wie man ein regelmäßiges Achteck aus einem Quadrat faltet. Man muss die Faltschritte aus den Bildern 8a bis 8d nur viermal hintereinander ausführen, für jede Quadratseite genau einmal. Auf diese Weise entsteht das Faltmuster, das im Bild 12a dargestellt ist, mit dem inneren kleinen Quadrat. Nun müssen nur noch die Ecken des Ausgangsquadrates an die Ecken des inneren Quadrates herangefaltet werden. Das Ergebnis ist ein regelmäßiges Achteck, wie es im Foto im Bild 12b gezeigt ist.

Einschub: Regelmäßiges Achteck

Natürlich kann man auch auf einfachere Weise ein regelmäßiges Achteck in ein quadratisches Papier falten. Dazu muss man sich nur die Eigenschaften eines regelmäßigen Achtecks erkunden. Im Bild E1 ist ein solches Achteck $A_1, A_2, ..., A_8$ gezeigt.

Wegen der Regelmäßigkeit des Achteckes sind alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel haben die Größe von 135^o.

Verbindet man zwei gegenüberliegende Ecken (also A_1 mit A_5, A_2 mit A_6, ...) durch jeweils eine Strecke, so gehen diese Strecken durch einen Punkt O, den Mittelpunkt des regelmäßigen Achtecks. Damit ist das regelmäßige Achteck auch drehsymmetrisch mit dem Zentrum O und dem Drehwinkel 45^o. Folglich passt jedes regelmäßige Achteck auf zwei Arten in ein Quadrat, wie es im Bild E2 gezeigt ist.

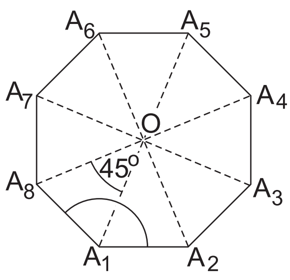

Bild E1

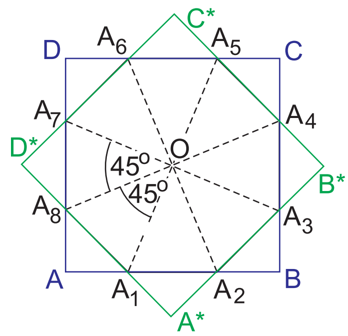

Bild E2

Mann kann also aus einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ ein regelmäßiges Achteck falten, indem man die vier Ecken des Quadrates so umfaltet, dass die Endpunkte der Faltlinien mit dem Mittelpunkt O des Quadrates einen Winkel von 45^o bildet. Schüler können nun selber herausfinden, man das Quadrat falten muss, um ein regelmäßiges Achteck zu erhalten. Sicher gibt es auch hier wieder mehrere Varianten. Eine Möglichkeit wird in den Bildern E3a bis E3e gezeigt.

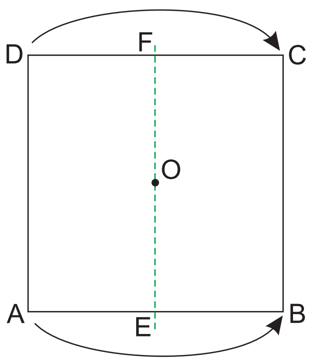

Bild E3a

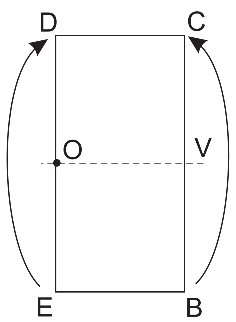

Bild E3b

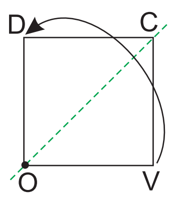

Bild E3c

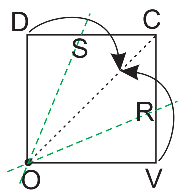

Bild E3d

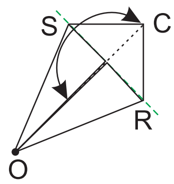

Bild E3e

Aufgrund der Faltung ist $|\sphericalangle SOR| = 45^o$. Wird das vierfach übereinander liegende kleine Quadrat wieder vollständig entfaltet, erkennen wir im Ausgangsquadrat das gesuchte regelmäßige Achteck Bild E3f.

Nun können wir A_1 mit A_6, A_2 mit A_5, A_3 mit A_8 und A_4 mit A_7 verbinden, wie es im Bild E4 gezeigt ist. Dies können wir als Ausgangspunkt für weitere Untersuchungen nutzen, wie sie bereits im vorhergehenden Abschnitt vorgestellt wurden. Eine Weiterführung dieser Überlegungen kann z.B. darin bestehen, dass A mit D', B mit A', C mit B' und D mit C' verbindet.

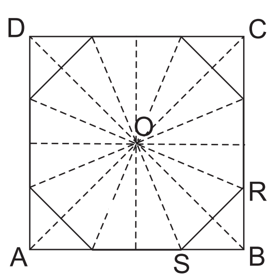

Bild E3f

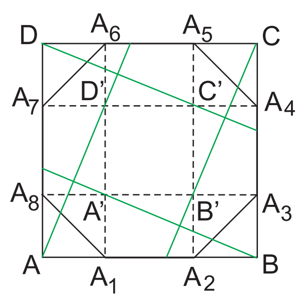

Bild E4

Fortsetzung

Damit sind wir wieder beim Faltmuster aus Bild 12a. Dort ist neben den vier kleinen Quadraten in den Ecken des Ausgangsquadrates auch das kleine Quadrat, dessen Seiten parallel zu den Seiten des Ausgangsquadrates sind, zu sehen, das jetzt mit A'B'C'D' bezeichnet wird.
Außerdem kann man dort ein weiteres Quadrat A*B*C*D* erkennen, dessen Seiten durch die Ecken von A'B'C'D' gehen. Dieses Quadrat ist auch im Bild 12b hervorgehoben. Das es sich bei diesem Viereck um ein Quadrat handelt, ergibt sich aus der Drehsymmetrie (Drehwinkel 90^0) der Figur, die sich aus der symmetrischen Faltfolge ergibt.

Nun sollen noch die Seitenlängen und Flächeninhalte der beiden Quadrate A'B'C'D' und A*B*C*D*, in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des Ausgangsquadrates, berechnet werden.

Die Seitenlänge des Quadrates A'B'C'D' ergibt sich aus den Überlegungen zu Bild 10. Da $|A'B'| = s$ ist, folgt $a' = |A'B'| = a(\sqrt{2}-1)$ und damit auch der Flächeninhalt dieses Quadrates $|A'B'C'D'| = (3-\sqrt{2})a^2$.

Die Seitenlänge a* des schräg liegenden Quadrates A*B*C*D* wird hier bestimmt, indem die Trägergeraden der Seiten dieses Quadrates als lineare Funktionen bezüglich eines Koordinatensystems (vgl. Bild 13) aufgefasst und entsprechende Schnittpunkte berechnet werden.

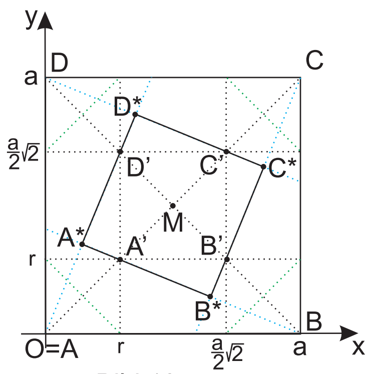

Bild 13

Zuerst betrachtet man die Gerade g(A*D*) durch A* und D*, die auch durch O und D' geht. Weil die Koordinaten von $D'(r; \frac{a}{2}\sqrt{2}) = D'(a(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}); \frac{a}{2}\sqrt{2})$ bekannt sind, ergibt sich

g(A*D*): $y = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})}x = (\sqrt{2}+1)x.$

Nun wird die Gleichung der Geraden g(A*B*) bestimmt. Da diese Gerade durch $A'(r;r) = A'(a(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}); a(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}))$ und $B(a;0)$ geht, ergibt sich
g(A*B*): $y = -\frac{r}{a-r}x + n = (1-\sqrt{2})x + n$, wobei n die Schnittstelle dieser Geraden mit der y-Achse ist. Mit den Koordinaten von B folgt nun noch $0 = (1-\sqrt{2})a + n$, woraus sich $n = -(1-\sqrt{2})a$ ergibt, und damit

g(A*B*): $y = (1-\sqrt{2})x - (1-\sqrt{2})a$ folgt.

Der Schnitt dieser beiden Geraden liefert die Koordinaten x_{A^*} und y_{A^*} des Punktes A*. Unter Verwendung des Gleichsetzungsverfahrens erhält man:

$(\sqrt{2}+1)x_{A^*} = (1-\sqrt{2})x_{A^*} - (1-\sqrt{2})a$, woraus $x_{A^*} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}a$ folgt.

Wird dieser Wert in g(A*D*) eingesetzt, ergibt sich $y_{A^*} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$.

Damit ist der Punkt $A^*(\frac{2-\sqrt{2}}{4}a; \frac{a}{4}\sqrt{2})$ mit seinen Koordinaten bestimmt.

Weil $x_{A^*} = \frac{r}{2}$ ist, ist A* der Mittelpunkt von AD'.

Nun werden die Koordinaten von B* bestimmt. Dazu kann man bedenken, dass sich B* aus A* durch eine Drehung um M mit dem Drehwinkel 90^0 (entgegen dem Uhrzeigersinn) ergibt. Folglich ergeben sich für die Koordinaten $y_{B^*} = x_{A^*}$ und $x_{B^*} = a - y_{A^*}$ für B*.

Damit ist auch $B^*(\frac{4-\sqrt{2}}{4}a; \frac{2-\sqrt{2}}{4}a)$ mit seinen Koordinaten bestimmt.

Mit Hilfe der Koordinaten von A* und B* kann die Seitenlänge a* des Quadrates A*B*C*D* bestimmt werden.
Es ist $a^* = |A^*B^*| = \sqrt{(x_{B^*}-x_{A^*})^2 + (y_{B^*}-y_{A^*})^2}$, woraus sich $a^* = a\sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}}$ ergibt. Damit erhält man auch den Flächeninhalt dieses Quadrates $|A^*B^*C^*D^*| = a^2(1-\frac{1}{2}\sqrt{2})$.

Damit gilt für die Seitenlägen der drei betrachteten Quadrate

$$\begin{array}{rcccccl} a : a^* : a' & = & 1 & : & \sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{2}} & : & \sqrt{2}-1 \quad \text{oder} \\ & = & \sqrt{2+\sqrt{2}} & : & 1 & : & \sqrt{2-\sqrt{2}} \quad \text{oder} \\ & = & \sqrt{2}+1 & : & \sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}} & : & 1 \end{array}$$

und für die Flächeninhalte

$$\begin{array}{rcccccl} |ABCD| : |A^*B^*C^*D^*| : |A'B'C'D'| & = & 1 & : & 1-\frac{1}{2}\sqrt{2} & : & 3-2\sqrt{2} \quad \text{oder} \\ & = & 2+\sqrt{2} & : & 1 & : & 2-\sqrt{2} \quad \text{oder} \\ & = & 3+2\sqrt{2} & : & 1+\frac{1}{2}\sqrt{2} & : & 1 \quad . \end{array}$$

Abschließend kann man fragen, ob sich die Seitenlänge des schräg liegendes Quadrates a* bzw. dessen Flächeninhalt $|A^*B^*C^*D^*|$ als ein Mittelwert von a und a' bzw. $|ABCD|$ und $|A'B'C'D'|$ ergibt. Dabei sollen nur das arithmetische ($\overline{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$), geometrische ($\overline{x} = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$), harmonische ($\overline{x} = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}$) und das quadratische Mittel ($\overline{x} = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$) betrachtet werden.

Eine entsprechende Rechnung zeigt, dass für die Seitenlänge a* keiner der vier Mittelwerte von a und a' zutrifft. Für den Flächeninhalt $|A^*B^*C^*D^*|$ findet man, dass $|A^*B^*C^*D^*|$ das harmonische Mittel von $|ABCD|$ und $|A'B'C'D'|$ ist.

Schließlich sei noch erwähnt, dass man aus dem Ausgangsquadrat entsprechend der durchgeführten Faltung auch ein 'Päckchen' falten kann, wie es die Bilderfolge in Bild 14 zeigt. Dies kann z.B. als netter Briefumschlag für Glückwünsche, die direkt auf die Innenseite geschrieben werden können, oder ähnliches verwendet werden. Im letzten Faltschritt dieser Bildfolge aus Bild 14 ist zu beachten, dass die rechts oben liegende Ecke nach innen gefaltet wird, während die rechts unten liegende Ecke umgefaltet wird.

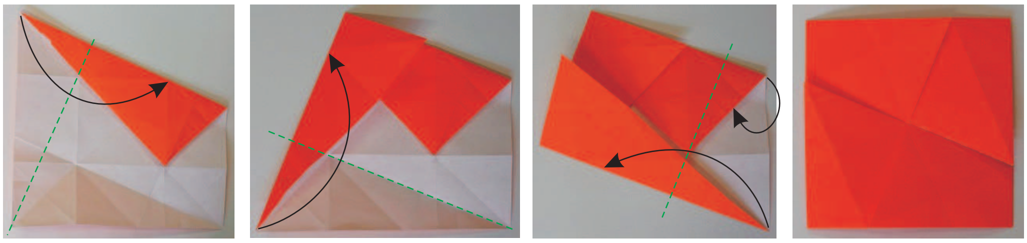

Bild 14

Literatur

[1] Weber, W.: *Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat.* In: PM, Heft 5, 1995, S. 200-203.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder beteiligen Sie sich an der oben genannten Internetseite.