Der goldene Schnitt

Michael Schmitz
(dr.michael.schmitz@mail.de)

(Februar 2026)

> "Die Geometrie birgt zwei große Schätze: der eine ist der Satz von Pythagoras, der andere ist der Goldene Schnitt. Den ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den zweiten dürfen wir ein kostbares Juwel nennen." (J. Kepler). [4](S. 195)

Beim *Goldenen Schnitt* teilt ein Punkt eine Strecke in einem speziellen Verhältnis.

Um dies näher zu erläutern, betrachten wir in der euklidischen Ebene eine Gerade g mit den beiden, voneinander verschiedenen Punkten A und B. P sei ein weiterer Punkt von g.
Wir unterscheiden für P drei Lagemöglichkeiten:

i) Ist P ein innerer Punkt der Strecke AB, so teilt P diese Strecke in zwei Teilstrecken AP und BP (Bild 1). Wir bezeichnen mit s die Länge der Strecke AB und mit $a = |AP|$ bzw. $b = |BP|$ die Längen der Teilstrecken. Es ist klar, dass $a, b, s > 0$ gilt. In diesem Fall sprechen wir davon, dass P die Strecke AB innen teilt.

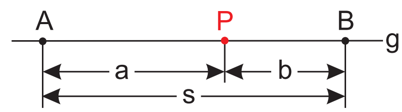
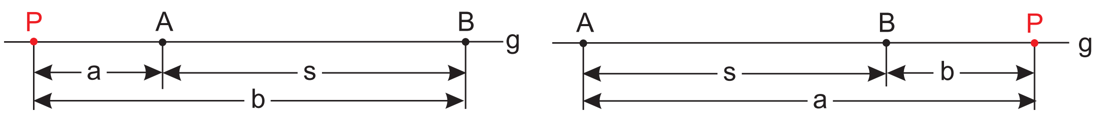


Bild 1: P teilt die Strecke AB innen.

ii) Natürlich kann P auf g auch außerhalb von AB liegen. Dann sagen wir, dass P die Strecke AB außen teilt. Auch in diesem Fall können wir die Streckenlängen $a = |AP|$, $b = |BP|$ und $s = |AB|$ angeben, wobei auch hier $a, b, s > 0$ gilt (Bild 2).



a b

Bild 2: P teilt die Strecke AB außen.

iii) P kann auf g auch mit A oder B zusammenfallen. Dann ist entweder $a = 0$ und $b = s$ oder $b = 0$ und $a = s$. Diese Fälle werden oft getrennt betrachtet oder bei der Teilung einer Strecke ausgeschlossen.

Üblicherweise wird das Verhältnis, in dem ein Punkt P die Strecke AB teilt, als Teilverhältnis bezeichnet und mit $TV(AB, P) = \frac{|AP|}{|BP|}$ definiert. Es ist dann klar, dass $P \neq B$ sein muss, da sonst eine Division durch $|BP| = b = 0$ stattfinden würde.

Auch müssen wir darauf hinweisen, ob es sich um eine innere oder äußere Teilung handelt, da wir hier nicht mit gerichteten (vorzeichenbehafteten) Streckenlängen arbeiten.

Unabhängig von der Definition des Teilverhältnisses können wir mit den drei Längen s, a, b sechs verschiedene Verhältnisse aufstellen:

$t1a = \frac{a}{b}$, $t1b = \frac{b}{a}$, $t2a = \frac{a}{s}$, $t2b = \frac{s}{a}$, $t3a = \frac{b}{s}$ und $t3b = \frac{s}{b}$.

Zur Veranschaulichung dieser sechs Verhältnisse zeichnen wir eine zu g senkrechte Gerade p durch P und legen auf ihr einen Punkt $Q(\neq P)$ fest. Nun tragen wir auf dem Strahl PQ^+ von P aus die sechs zu P gehörenden Werte ab. $T1a$, ..., $T3b$ sind die zugehörigen Punkte auf p. Machen wir dies für jeden Punkt P von g, so erhalten wir eine Grafik, die im Bild 3 zu sehen ist. Dabei sind die Verhältnisse $t1a$, $t1b$ grün, die Verhältnisse $t2a$, $t2b$ hellblau und die Verhältnisse $t3a$, $t3b$ blau dargestellt.

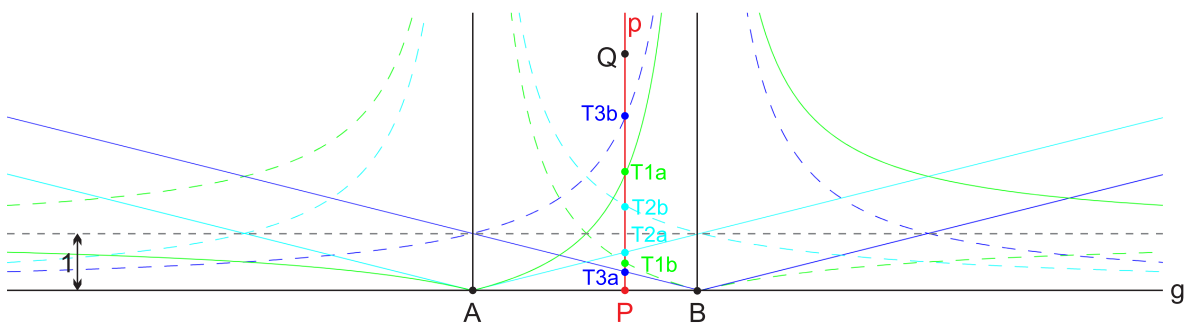


Bild 3: Darstellung der sechs verschiedenen Verhältnisse.

Natürlich müssen wir beachten, dass für $P = A$ $(a = 0)$ bzw. $P = B$ $(b = 0)$ manche dieser sechs Verhältnisse nicht definiert sind, da eine Division durch 0 nicht möglich ist.

Dem Bild 3 entnehmen wir, dass sich die Graphen, die zu den sechs Verhältnissen gehören, in mehreren Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte wollen wir etwas näher untersuchen.

Wir beginnen mit der inneren Teilung von AB durch P. Bild 4 zeigt diese Situation noch einmal, etwas vergrößert. Die Bezeichnung der Schnittpunkte entnehmen wir diesem Bild. Zu jedem dieser Schnittpunkte gehört genau ein Punkt P_i $(i = 1...11)$ der Strecke AB, der der Fußpunkt des Lotes von Si auf AB ist.

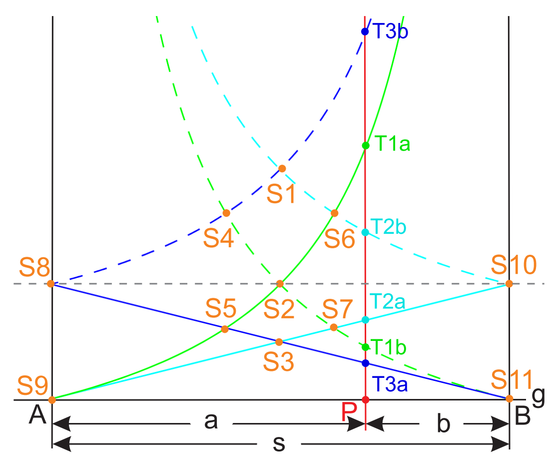


Bild 4: P teilt die Strecke AB innen.

- Für $S1$ gilt: $T2b = T3b$, d.h. $\frac{s}{a} = \frac{s}{b}$ $(a, b > 0)$, woraus $a = b$ folgt. Damit ist der zugehörige Punkt P_1 der Mittelpunkt von AB und $TV(AB, P_1) = 1$.
- Für $S2$ gilt: $T1a = T1b$, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ $(a, b > 0)$, woraus $a^2 = b^2$ und damit $a = b$ folgt. Damit ist P_2 der Mittelpunkt von AB und $TV(AB, P_2) = 1$.
- Für $S3$ gilt: $T2a = T3a$, d.h. $\frac{a}{s} = \frac{b}{s}$ $(s > 0)$, woraus $a = b$ folgt. Damit ist P_3 der Mittelpunkt von AB und $TV(AB, P_3) = 1$.
Die drei Schnittpunkte $S1$, $S2$ und $S3$ bestimmen damit denselben Lotfußpunkt auf g $(P_1 = P_2 = P_3)$, und zwar den Mittelpunkt von AB.

- Für $S4$ bzw. $S5$ gilt: $T1b = T3b$, d.h. $\frac{b}{a} = \frac{s}{b}$ bzw. $T1a = T3a$, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{b}{s}$ $(a, b, s > 0)$, woraus für beide Schnittpunkte $b^2 = as$ folgt. Mit $s = a + b$ erhalten wir $b^2 = a(a + b)$ bzw. $b^2 - ab - a^2 = 0$. Damit wird $b_{12} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Weil $b > 0$ ist, erhalten wir $b = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$. Daraus folgt $\frac{a}{b} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Damit fallen die beiden zu $S4$ bzw. $S5$ gehörigen Punkte P_4 und P_5 zusammen und es gilt $TV(AB, P_4) = TV(AB, P_5) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Weil $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ ist, ergibt sich hier auch $a < b$. Außerdem ist $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$ und mit $s = a + b$ folgt $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$ und $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$.

- Für $S6$ bzw. $S7$ gilt: $T1a = T2b$, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{s}{a}$ bzw. $T1b = T2a$, d.h. $\frac{b}{a} = \frac{a}{s}$ $(a, b, s > 0)$, woraus für beide Schnittpunkte $a^2 = bs$ folgt. Mit $s = a + b$ erhalten wir $a^2 = b(a + b)$ bzw. $a^2 - ab - b^2 = 0$. Damit wird $a_{12} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} = \frac{b}{2} \pm \frac{b}{2}\sqrt{5}$. Weil $a > 0$ ist, erhalten wir $a = \frac{b}{2}(1 + \sqrt{5}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$. Daraus folgt $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, also fallen die beiden zugehörigen Punkte P_6 und P_7 zusammen, und es gilt $TV(AB, P_6) = TV(AB, P_7) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Weil $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}b$ ist, erhalten wir hier $a > b$ und $b = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Mit $s = a + b$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$ und $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$.

- Für $S8$ gilt: T3a=T3b, d.h. $\frac{b}{s} = \frac{s}{b}$ $(b, s > 0)$, woraus $b^2 = s^2$ und damit $b = s$ folgt.
Weil $s = a + b$ ist, ergibt sich $b = a + b$ und folglich ist $a = 0$. Damit ist in diesem Fall $\frac{a}{b} = 0$ und der zugehörigen Punkt P_8 fällt mit A zusammen. Es gilt also $TV(AB, P_8) = 0$.

- Für $S9$ gilt: T1a=T2a, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{a}{s}$ $(b, s > 0)$.
Wenn $a > 0$ ist, dann folgt sofort $b = s$ und wegen $s = a + b$ ist $a = 0$. Also kann hier der Fall $a > 0$ nicht auftreten.
Daher muss $a = 0$ sein, womit $\frac{a}{b} = 0$ ist und folglich $TV(AB, P_9) = 0$ gilt. Damit fällt auch der Punkt P_9 mit A zusammen.

- Für $S10$ gilt: T2a=T2b, d.h. $\frac{a}{s} = \frac{s}{a}$ $(a, s > 0)$, woraus $a^2 = s^2$ und damit $a = s$, also $b = 0$ folgt. Demzufolge ist $P_{10} = B$ und $\frac{a}{b}$ lässt sich wegen $b = 0$ nicht angeben. Damit können wir für P_{10} auch kein Teilverhältnis $TV(AB, P_{10})$ bestimmen.

- Für $S11$ gilt: T1b=T3a, d.h. $\frac{b}{a} = \frac{b}{s}$ $(a, s > 0)$.
Wenn $b > 0$ ist, dann folgt sofort $a = s$ und wegen $s = a + b$ ist $b = 0$. Also kann hier der Fall $b > 0$ nicht auftreten.
Daher muss $b = 0$ sein, womit $P_{11} = B$ folgt und $\frac{b}{a} = 0$ ist. $\frac{a}{b}$ lässt sich wegen $b = 0$ nicht angeben. Damit können wir für P_{11} auch kein Teilverhältnis $TV(AB, P_{11})$ bestimmen.

Für unsere weiteren Betrachtungen bezeichnen wir die zusammenfallenden Punkte P_1, P_2 und P_3 mit M (Mittelpunkt von AB), die zusammenfallenden Punkte P_4 und P_5 mit G_1 und die beiden zusammenfallenden Punkte P_6 und P_7 mit G_2.

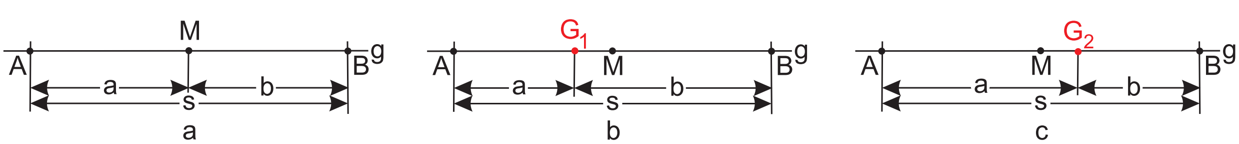


Bild 5: Die Punkte M, G_1 und G_2 auf der Strecke AB.

Für M gilt $a = b$ und $TV(AB, M) = 1$ (Bild 5a).

Für G_1 gilt $a < b$ und $TV(AB, G_1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, sowie $\frac{a}{b} = \frac{b}{s}$ und $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$ und $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$ (Bild 5b).
Für G_2 gilt $b < a$ und $TV(AB, G_2) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, sowie $\frac{b}{a} = \frac{a}{s}$ und $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$ und $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$ (Bild 5c).
Wir erkennen sofort, dass G_1 und G_2 auf AB symmetrisch zu M liegen. Ebenso können wir eine Besonderheit in den beiden Verhältnisgleichungen erkennen. Unter Verwendung der Längenverhältnisse der Strecken a, b und s können wir diese beiden Verhältnisgleichungen auch wie folgt gemeinsam formulieren:

$$\frac{\textbf{kurze Teilstrecke}}{\textbf{lange Teilstrecke}} = \frac{\textbf{lange Teilstrecke}}{\textbf{gesamte Strecke}} \text{ bzw. kurz } \frac{\textbf{kurz}}{\textbf{lang}} = \frac{\textbf{lang}}{\textbf{gesamt}} \text{ oder auch } \frac{\textbf{kurz}}{\textbf{lang}} = \frac{\textbf{lang}}{\textbf{kurz+lang}}.$$

Dieses besondere Verhältnis, in dem ein Punkt eine Strecke teilt, heißt **Goldener Schnitt**.

Definition 1 (**Goldener Schnitt**). Ein Punkt einer Strecke teilt diese genau dann im Goldenen Schnitt, wenn für die Längen der Teilstrecken $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ gilt.

Die zugehörigen Teilverhältnisse werden üblicherweise mit φ bzw. Φ bezeichnet, also $TV(AB, G_1) = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180339...$ und $TV(AB, G_2) = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,6180339....$
Damit haben wir auf AB zwei Punkte gefunden, die die Strecke im Goldenen Schnitt teilen.

Gibt es auf AB weitere Punkte, für die $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ gilt?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zuerst einen Punkt Q auf der Strecke AB, der zwischen A und dem Mittelpunkt M von AB liegt. Dann ergibt sich aus $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{b}{s}$, woraus mit $b = s-a$ sofort $as = (s-a)^2$ folgt. Damit erhalten wir $a^2 - 3sa + s^2 = 0$, also $a_{1,2} = \frac{3}{2}s \pm \frac{1}{2}s\sqrt{5} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}s$. Von diesen beiden Lösungen ist nur $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$ möglich, da $a < \frac{1}{2}s$ gilt.
Damit fällt Q mit G_1 zusammen und auf AM gibt es außer G_1 keinen weiteren Punkt mit der geforderten Eigenschaft.

Nun betrachten wir auf AB einen Punkt Q, der zwischen M und B liegt. Aus $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ ergibt sich nun die Verhältnisgleichung $\frac{b}{a} = \frac{a}{s}$. Mit $b = s - a$ erhalten wir $a^2 + sa - s^2 = 0$, woraus $a_{1,2} = -\frac{1}{2}s \pm \frac{1}{2}s\sqrt{5} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}s$ folgt. Weil $a > 0$ ist, ist nur $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$ möglich. Damit fällt Q mit G_2 zusammen, und es gibt auf MB nur den Punkt G_2 mit der geforderten Eigenschaft.

Damit gibt es auf der Strecke AB genau zwei Punkte, die diese Strecke innen im Goldenen Schnitt teilen. Es gilt dann

Satz 1. Ein Punkt P der Strecke AB (A $\neq B$) teilt diese genau dann innen im Goldenen Schnitt, wenn entweder $TV(AB, P) = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oder $TV(AB, P) = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ gilt.

Damit schließen wir die Untersuchung der Schnittpunkte der Kurven, die zu den Verhältnissen $t1a$, $t1b$, $t2a$, $t2b$, $t3a$ und $t3b$ gehören und „über“ AB liegen, ab.

Wir wenden uns jetzt den entsprechenden Schnittpunkten zu, die „über“ der Geraden g außerhalb von AB liegen, und bezeichnen diese wie im Bild 6 angegeben. Für $i = 12...25$ nennen wir den Lotfußpunkt von Si auf g wieder P_i.

Auch hier ist $|AB| = s$, $|AP| = a$ und $|BP| = b$. Wir wollen herausfinden, ob es unter den Punkten P_i $(i = 12, ..., 25)$ Punkte gibt, für die $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ gilt, die also AB außen im

Goldenen Schnitt teilen. Damit übertragen wir die obige Definition 1 dafür, dass ein Punkt eine Strecke innen im Goldenen Schnitt teilt auf die äußere Teilung im Goldenen Schnitt.

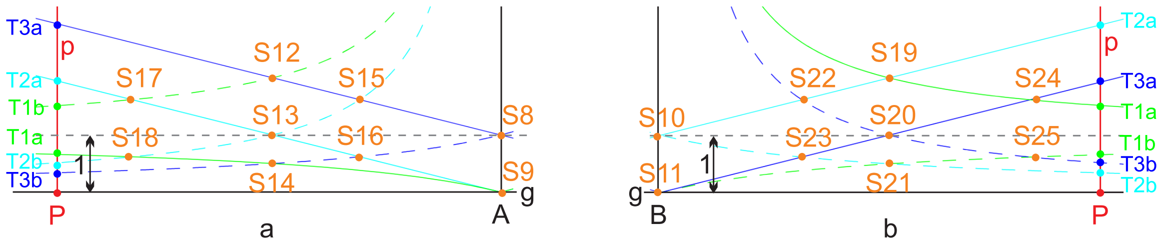


Bild 6: Äußere Teilung.

Wir beginnen mit $S12$ ... $S18$ (Bild 6a). Hier ist speziell $0 < a < b$ und $s = b - a$.

Für $S12$ ist $T1b = T3a$, also $\frac{b}{a} = \frac{b}{s}$, für $S13$ ist $T2a = T2b$, also $\frac{a}{s} = \frac{s}{a}$ und für $S14$ ist $T1a = T3b$, also $\frac{a}{b} = \frac{s}{b}$.
Dann folgt für jeden dieser drei Schnittpunkte $a = s$, bzw. $2a = b$. Damit fallen die drei Punkte P_{12}, P_{13} und P_{14} in einem Punkt zusammen, den wir mit L_1 bezeichnen (Bild 7a).
In diesem Fall ist $TV(AB, L_1) = \frac{1}{2}$ und A ist der Mittelpunkt von L_1B. Für L_1 gilt $\frac{kurz}{lang} \neq \frac{lang}{kurz+lang}$. Damit teilt L_1 die Strecke AB nicht außen im Goldenen Schnitt.

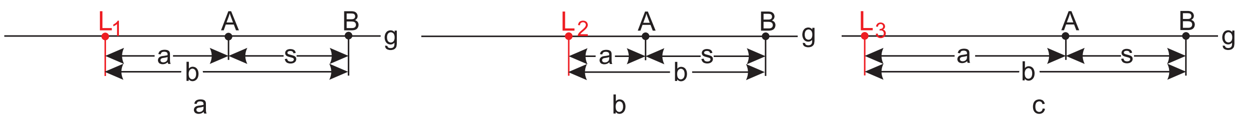


Bild 7: Äußere Teilung - P auf AB^-.

Für $S15$ ist $T2b = T3a$, also $\frac{s}{a} = \frac{b}{s}$ und für $S16$ ist $T2a = T3b$, also $\frac{a}{s} = \frac{s}{b}$.
Dann folgt für diese beiden Schnittpunkte $s^2 = ab$, und mit $s = b - a$ erhalten wir $(b-a)^2 = ab$, also $a^2 - 3ba + b^2 = 0$. Daraus folgt $a_{1,2} = \frac{3}{2}b \pm \frac{1}{2}b\sqrt{5} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}b$.
Weil $a < b$ ist, erhalten wir $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}b$. Mit $b = a + s$ ergibt sich $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}(a+s)$, woraus $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$ folgt.
Wir stellen fest, dass die beiden Punkte P_{15} und P_{16} auch in einem Punkt zusammenfallen, den wir mit L_2 bezeichnen (Bild 7b).
In diesem Fall gilt $TV(AB, L_2) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
Für L_2 erhalten wir $\frac{kurz}{lang} = \frac{a}{b} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{lang}{kurz+lang} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$.
Damit teilt auch L_2 die Strecke AB nicht außen im Goldenen Schnitt.

Für $S17$ ist $T1b = T2a$, also $\frac{b}{a} = \frac{a}{s}$ und für $S18$ ist $T1a = T2b$, also $\frac{a}{b} = \frac{s}{a}$.
Dann folgt für diese beiden Schnittpunkte $a^2 = bs$, und mit $s = b - a$ erhalten wir $a^2 = b(b-a)$, also $a^2 + ba - b^2 = 0$. Daraus folgt $a_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}b\sqrt{5} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}b$.
Weil $a > 0$ ist, folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$. Mit $b = a + s$ ergibt sich $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(a+s)$, woraus $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}s$ folgt.
Damit fallen auch die beiden Punkte P_{17} und P_{18} in einem Punkt zusammen, den wir mit L_3 bezeichnen (Bild 7c).
In diesem Fall ist dann $TV(AB, L_3) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Auch für L_3 berechnen wir $\frac{kurz}{lang} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{lang}{kurz+lang} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}+1} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Damit gilt für L_3 $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ und folglich teilt dieser Punkt die Strecke AB außen im Goldenen Schnitt.

Damit haben wir einen Punkt auf AB^- gefunden, der AB außen im Goldenen Schnitt teilt. Für das zugehörige Teilverhältnis gilt auch $TV(AB, L_3) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Nun müssen wir noch untersuchen, ob es auf AB^- einen weiteren Punkt L gibt, für den $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$, also $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$ gilt. Aus dieser Gleichung ergibt sich $a^2 + ba - b^2 = 0$, woraus $a_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}b\sqrt{5} = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}b$ folgt. Weil $a > 0$ ist, ist $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}b$. Dadurch ist aber schon der Punkt L_3 eindeutig auf AB^- bestimmt. Daher ist L_3 auf AB^- der einzige Punkt, der AB außen im Goldenen Schnitt teilt.

Auch wenn L_1 und L_2 die Strecke AB nicht außen im Goldenen Schnitt teilen, hat L_1 die Besonderheit, dass A der Mittelpunkt von L_1B ist, d.h., $TV(L_1B, A) = 1$.
Gibt es für A bezüglich der Strecke L_2B auch eine Besonderheit? Dazu berechnen wir $TV(L_2B, A) = \frac{a}{s} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Wegen Satz 1 teilt damit A die Strecke L_2B innen im Goldenen Schnitt.
Natürlich berechnen wir auch $TV(L_3B, A) = \frac{a}{s} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Wegen Satz 1 teilt damit A die Strecke L_3B innen im Goldenen Schnitt.

Abschließend müssen wir noch die Schnittpunkte $S19$ ... $S25$ untersuchen (Bild 6b). Wie oben schon erwähnt, bezeichnen wir mit P_i den Fußpunkt des Lotes von Si auf g ($i = 19...25$). Speziell ist hier $0 < b < a$ und $s = a - b$.
Analog zu den Schnittpunkten $S12$ ... $S18$ (Bild 6a) erhalten wir, dass P_{19}, P_{20} und P_{21} in einem Punkt zusammenfallen, den wir mit R_1 bezeichnen (Bild 8a). Ebenso fallen P_{22} und P_{23} sowie P_{24} und P_{25} jeweils in einem Punkt zusammen, die wir mit R_2 bzw. R_3 bezeichnen (Bild 8b, c)

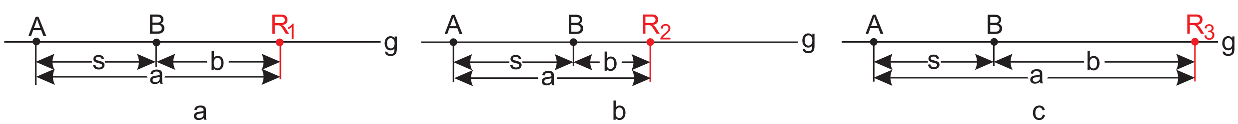


Bild 8: Äußere Teilung - P auf BA^-.

Da die Schnittpunkte $S19$ ... $S25$ zu den Schnittpunkten $S12$ ... $S18$ bezüglich der Mittelsenkrechten von AB symmetrisch liegen, erhalten wir
für R_1, dass $b = 2a$, also $TV(AB, R_1) = \frac{1}{2}$ ist ,
für R_2, dass $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$, also $TV(AB, R_2) = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ist und
für R_3, dass $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, also $TV(AB, R_3) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$ ist.

Natürlich ist auch R_3 der einzige Punkt auf BA^-, für den $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ gilt. Damit gibt es auf BA^- genau einen Punkt, der die Strecke AB außen im Goldenen Schnitt teilt.

Auch hier ist B der Mittelpunkt von R_1A, $TV(R_1A, B) = 1$. Außerdem teilt B die Strecken R_2A und R_3A jeweils innen im Goldenen Schnitt, da $TV(R_2A, B) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $TV(R_3A, B) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ist.

Insgesamt haben wir festgestellt, dass es zu einer gegebenen Strecke AB genau vier Punkte gibt, die AB im Goldenen Schnitt teilen, zwei innerhalb von AB und zwei außerhalb. Von

den äußeren Teilpunkten liegt einer auf AB^- und einer auf BA^-.
Des weiteren gilt der Satz 1 nicht nur für die innere Teilung einer Strecke. Es gilt

Satz 2. Ein Punkt P teilt die Strecke AB (A $\neq B$) genau dann im Goldenen Schnitt, wenn entweder $TV(AB, P) = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ oder $TV(AB, P) = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ gilt.

Konstruktionen

Nun zeigen wir, dass sich die Teilpunkte, die eine Strecke AB im Goldenen Schnitt teilen, auch mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen.

Die Konstruktion der inneren Teilpunkte ist einfach.
Ist AB die Strecke, die im Goldenen Schnitt geteilt werden soll, dann errichten wir auf der Geraden g durch A und B die Senkrechte in A. Auf dieser Senkrechten tragen wir von A aus die Länge $\frac{|AB|}{2}$ ab und erhalten den Punkt A' (Bild 9). Der Kreis um A' schneidet $A'B$ in T. Nun schneidet der Kreis um B durch T unsere Strecke AB im gesuchten Teilpunkt G_1.

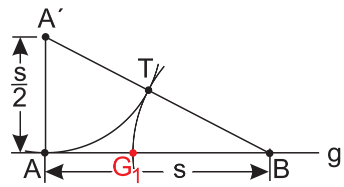


Bild 9: G_1 teilt AB im Goldenen Schnitt.

Zur Bestätigung der Konstruktion bedenken wir, dass ABA' ein rechtwinkliges Dreieck ist und folglich $|A'B|^2 = s^2 + (\frac{1}{2}s)^2 = \frac{5}{4}s^2$ gilt. Daher ist $|A'B| = \frac{1}{2}s\sqrt{5}$.
Damit erhalten wir $|BT| = \frac{1}{2}s\sqrt{5} - \frac{1}{2}s = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$, also auch $|BG_1| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}s$.
Und schließlich ist $|AG_1| = s - |BG_1| = s - \frac{\sqrt{5}-1}{2}s = \frac{3-\sqrt{5}}{2}s$.
Nun ergibt sich $TV(AB, G_1) = \frac{|AG_1|}{|BG_1|} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$ und G_1 teilt AB tatsächlich im Goldenen Schnitt.

Für den zweiten Teilpunkt G_2 errichten wir in B die Senkrechte zu AB und konstruieren analog wie eben (Bild 10).
Eine entsprechende Rechnung liefert dann
$TV(AB, G_2) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$ und G_2 teilt ebenfalls AB im Goldenen Schnitt.

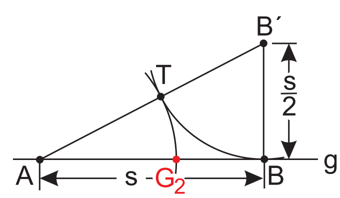


Bild 10: G_2 teilt AB im Goldenen Schnitt.

Hier bemerken wir endlich auch eine interessante Eigenschaft von Φ und φ. Wie man sofort sieht, gilt:

$$\Phi - \varphi = 1. \tag{1}$$

Dies hätten wir auch schon weiter oben, als wir die ersten Stellen der Dezimaldarstellung der beiden Zahlen angegeben haben, bemerken können.
Auch eine weitere Eigenschaft drängt sich uns hier gleich auf. Es ist nämlich

$$\Phi \cdot \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 \tag{2}$$

Und wie finden wir die Teilpunkte, die die Strecke AB außen im Goldenen Schnitt teilen?
Um diese beiden Teilpunkte zu konstruieren, benötigen wir den Strahlensatz.
Wir gehen von einer Strecke AB aus, die durch G_1 und G_2 jeweils im Goldenen Schnitt geteilt wird. Dann zeichnen wir zwei zueinander parallele Geraden (die von g verschieden sind), die eine durch A, die andere durch B.

Zeichnen wir nun eine Gerade (die von g verschieden ist) durch G_1, die die beiden Parallelen in den Punkte A' und B' schneidet (Bild 11a). Weiter schneidet der Kreis um A durch A' die Gerade $g(AA')$ außer in A' noch in A''.

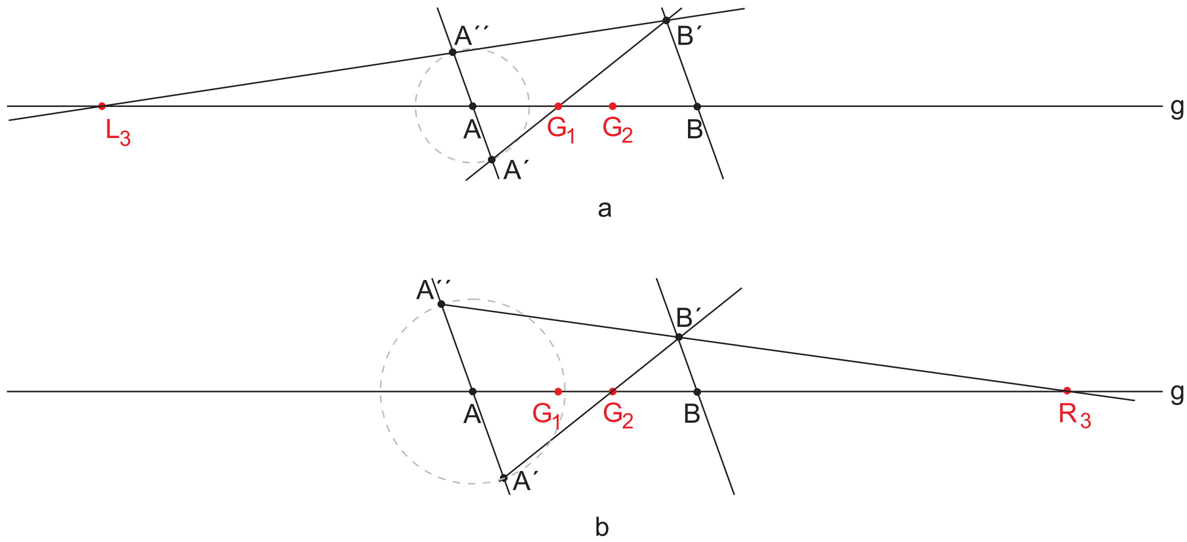


Bild 11: Konstruktion zur äußeren Teilung von AB im Goldenen Schnitt.

Weil G_1 die Strecke AB innen im Goldenen Schnitt teilt, ist $\frac{|AG_1|}{|BG_1|} = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Aufgrund des Strahlensatzes (Zentrum G_1) erhalten wir $\frac{|AG_1|}{|BG_1|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$.
Da aufgrund der Konstruktin $|AA'| = |AA''|$ ist, folgt $\frac{|AG_1|}{|BG_1|} = \frac{|AA''|}{|BB'|}$ $(\neq 1)$. Damit ist die Gerade durch B' und A'' nicht parallel zu g und schneidet diese in genau einem Punkt L_3.
Dann ergibt sich mit dem Strahlensatz (Zentrum L_3) $\frac{|AA''|}{|BB'|} = \frac{|AL_3|}{|BL_3|}$.
Insgesamt erhalten wir $\frac{|AL_3|}{|BL_3|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi$. Folglich teilt L_3 die Strecke AB außen im Goldenen Schnitt.

Jetzt zeichnen wir eine Gerade (die von g verschieden ist) durch G_2, die die beiden Parallelen in den Punkte A' und B' schneidet (Bild 11b). Der Kreis um A durch A' bestimmt auf $g(AA')$ den Punkt A'' und $g(A''B')$ schneidet g in R_3.
Die selben Überlegungen wie eben ergeben, dass $\frac{|AR_3|}{|BR_3|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$ gilt. Also teilt R_3 die Strecke AB außen im Goldenen Schnitt.

Damit haben wir auch für die äußere Teilung einer Strecke im Goldenen Schnitt eine Konstruktionen angegeben.

Historisches

Die Bezeichnung *Goldener Schnitt*, die wir heute für die Teilung einer Strecke mit der Verhältnisgleichung $\frac{kurz}{lang} = \frac{lang}{kurz+lang}$ verwenden, wurde im 19. Jh. von dem deutschen Mathematiker Martin Ohm (1792 - 1872) eingeführt. Martin Ohm war übrigens der Bruder des Physikers Georg Simon Ohm (1789 - 1854), der das Ohmsche Gesetz gefunden hat.
Aber die Beschäftigung mit dem hier betrachteten Streckenverhältnis liegt viel weiter zurück.

Messungen an der Cheops-Pyramide in Gizeh ergaben, dass in der großen Pyramide, die etwa 2550 v.u.Z. erbaut wurde, der Goldene Schnitt als Verhältnis wichtiger Maße zu finden ist. Eine Vermessung der großen Pyramide durch den britischen Ägyptologen William Matthew Flindner Petrie in den 1880er Jahren ergab, dass die Höhe der Pyramide

$h_P = 7 \cdot 40 = 280$ ägypische Königsellen beträgt und die Länge einer Kante der quadratischen Grundfläche $a = 11 \cdot 40 = 440$ ägypische Königsellen ist (vgl. [8] und [2], S.36). Bei seinen Messungen legte Flindner die alte ägyptische Königselle als Einheit zu Grunde. Diese Messergebnisse haben bis heute noch Gültigkeit, wie man in [8] lesen kann.

Aus den Maßen für die Höhe und der halbe Grundkantenlänge ergibt sich für die Höhe eines Seitendreiecks $h_D = 356$ ägyptische Ellen (Bild 12).
Auch Posamentier und Lehmann verwenden in [6] diese Maße für die große Pyramide von Gizeh.
Dort berechnen sie das Verhältnis der Höhe eines Seitendreiecks bzw. der Pyramidenhöhe jeweils zur halben Grundkantenlänge. Man erhält:

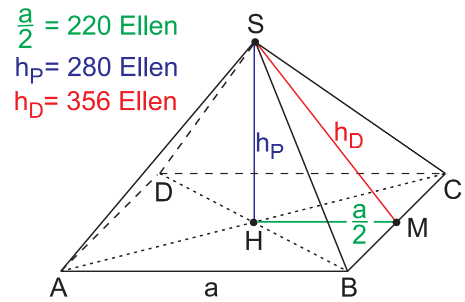


Bild 12: Die Cheops-Pyramide.

$\frac{h_D}{\frac{a}{2}} = \frac{356}{220} = 1,61818... \approx \Phi$ $(\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,6180339...)$
und
$\frac{h_P}{\frac{a}{2}} = \frac{280}{220} = 1,27272... \approx \sqrt{\Phi}$ $(\sqrt{\Phi} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \approx 1,27201...)$.
Damit stellt sich dir Frage:
Haben die alten ägyptischen Baumeister den Goldenen Schnitt gekannt und die große Pyramide danach geplant und gebaut?

Und dann gibt es noch eine Quelle. Der griechische Geschichtsschreiber, Geograph und Völkerkundler Herodot (490/480 - 430/420 v.u.Z.) (vgl. [11]) hat erwähnt, „daß ihm die ägyptischen Priester über die Form der Cheopspyramide die Angaben gemacht hätten, das Quadrat über ihrer Höhe sei einem Seitendreieck flächengleich“ ([1], S. 140).

Verfolgen wir diese Idee, dann muss $h_P^2 = \frac{a}{2} \cdot h_D$ (mit den Bezeichnungen aus Bild 12) gelten. Weil im rechtwinkligen Dreieck HMS mit dem Satz des Pythagoras $h_P^2 = h_D^2 - (\frac{a}{2})^2$ gilt, erhalten wir
$h_D^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{a}{2} \cdot h_D$ bzw.
$h_D^2 - \frac{a}{2} \cdot h_D - (\frac{a}{2})^2 = 0$. Damit erhalten wir
$h_{D_{1/2}} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{(\frac{a}{4})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4} \pm \frac{a}{4}\sqrt{5} = \frac{a}{2}(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2})$.
Da aber nur die positive Lösung interessiert, erhalten wir
$h_D = \frac{a}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = \frac{a}{2}\Phi$ und damit $\frac{h_D}{\frac{a}{2}} = \Phi$.
Im rechtwinkligen Dreieck HMS erhalten weiter
$h_P^2 = h_D^2 - (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2\Phi^2 - (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2(\Phi^2 - 1) = (\frac{a}{2})^2((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - \frac{4}{4}) = (\frac{a}{2})^2 \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5-4}{4}$, also
$h_P^2 = (\frac{a}{2})^2 \cdot \Phi$ und damit
$h_P = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\Phi}$ und weiter $\frac{h_P}{\frac{a}{2}} = \sqrt{\Phi}$.

Diese Ergebnisse legen, zusammen mit den obigen Messwerten, nahe, dass die alten ägyptischen Baumeister sich beim Bau der Cheops-Pyramide vom Goldenen Schnitt leiten ließen. Dem steht aber ein wichtiger Einwand gegenüber, wie Beutelspacher in [1] (S.141) schreibt, dass nämlich „die damalige ägyptische Mathematik nicht sehr weit entwickelt war; insbesondere gibt es keine Belege dafür, daß der goldene Schnitt den Ägyptern bekannt gewesen wäre“.

Bevor wir die historischen Betrachtungen fortsetzen, bemerken wir noch eine interessante Eigenschaft der Zahl Φ. Im Dreieck HMS gilt $h_D^2 = h_P^2 + (\frac{a}{2})^2$, also $(\frac{a}{2}\Phi)^2 = (\frac{a}{2}\sqrt{\Phi})^2 + (\frac{a}{2})^2$.
Damit ist aber sofort

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \text{ oder auch } \Phi^2 - \Phi = 1. \tag{3}$$

Nach diesem kleinen Einschub geht es mit den historischen Betrachtungen weiter. Gesichert ist nämlich, das der Goldene Schnitt bei den Pythagoreern bekannt war. Die Pythagoreer waren eine einflussreiche, mystisch-philosophische Gemeinschaft, die im 6. v.u.Z. von Pythagoras von Samos in Süditalien gegründet wurde. Sie interessierten sich neben der Philosophie auch für Mathematik, im Besonderen auch für die regelmäßigen Körper, für regelmäßige Flächen und Zahlenverhältnisse. So war das regelmäßige Fünfeck wichtig, denn die Oberfläche des Dodekaeders wird von 12 dieser Fünfecke gebildet.
Nach [3] war es der Pythagoreer Hippasos von Metapont (siehe auch [12]), der in ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts v.u.Z. die *Inkommensurabilität* von der Seitenlänge und der Länge der Diagonalen im regelmäßigen Fünfeck entdeckte. Er hat damit nachgewiesen, dass es keine Strecke e so gibt, dass sowohl die Länge der Diagonalen, als auch die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks ganzzahlige Vielfache der Länge von e sind. Die beiden betrachteten Strecken haben damit kein gemeinsames Maß. Dies war eine sehr überraschende Entdeckung, da man bisher davon ausging, dass alle Verhältnisse rational sind.

Betrachten wir als Beispiel ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $|AB| = 65mm$ und $|AD| = 25mm$, wie es im Bild 13 zu sehen ist.

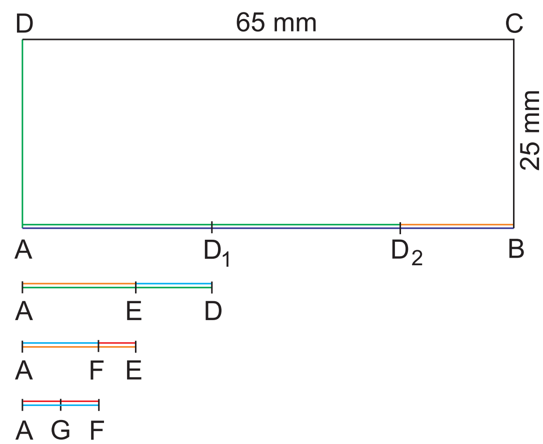


Bild 13: Ein Rechteck.

Uns interessiert das Verhältnis der Längen der beiden Rechteckseiten AB und AD. Dazu tragen wir die kürzere Seite sooft auf der längeren nacheinander ab, ohne die längere Strecke zu übertreffen. In unserem Beispiel können wir AD genau zweimal abtragen. Dabei bleibt ein Rest D_2B mit $D|_2B| = 15mm$. Dieser Rest wird nun auf der kürzeren Seite sooft wie möglich nacheinander abgetragen, ohne die kürzere Seite zu übertreffen. Bei uns ist das genau einmal möglich. Dabei entsteht ein Rest ED mit $|ED| = 10mm$. Dieser Rest wird auf dem vorhergehenden Rest abgetragen. Im Beispiel geht das genau einmal und es bleibt ein Rest FE mit $|FE| = 5mm$. Auch dieser Rest wird auf dem vorhergehenden Rest so oft wie möglich abgetragen. Im Beispiel geht das genau zweimal, wobei dieses Mal kein Rest entsteht. Damit endet das Verfahren und FE ist das gemeinsame Maß der beiden Rechteckseiten, die damit kommensurabel sind. Es ist $|AB| = 13 \cdot |FE|$ und $|AD| = 5 \cdot |FE|$. Dieses Verfahren wird später bei Euklid (um 300 v.u.Z.) *Wechselwegnahme* heißen.

Dieses Verfahren war schon den Handwerkern (etwa Zimmerleute oder Steinmetze) als praktische Regel vor der Zeit des Hippasos bekannt, wie man in [3] lesen kann.

Hippasos hat diese praktische Regel nun auf eine geometrische Figur, das regelmäßige Fünfeck, bzw. Pentagramm, welches ein Erkennungszeichen der Pythagoreer war, angewendet. Er suchte ein gemeinsames Maß für die Längen einer Diagonalen und einer Seite eines regelmäßigen Fünfecks. Dabei konnte er bereits auf eine große Menge geometrischer Kenntnisse zurückgreifen.

$ABCDE$ ist ein regelmäßiges Fünfeck (Bild 14a), dann beträgt die Größe der Innenwinkel jeweils 108°. Weil ADE gleichschenklig ist, müssen die Basiswinkel jeweils eine Größe von 36° haben.

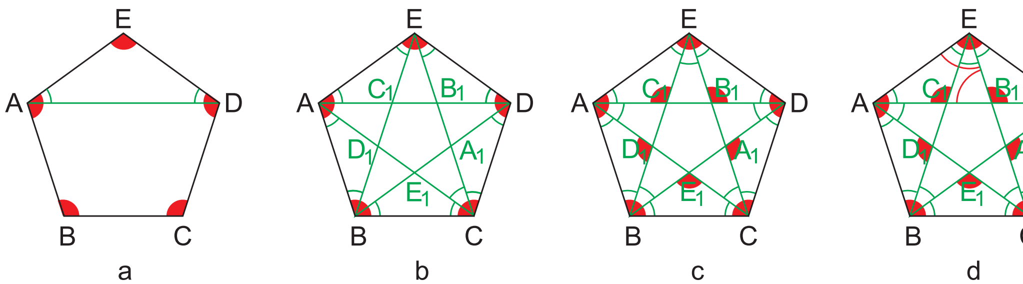


Bild 14: Winkel im regelmäßigen Fünfeck.

Dies gilt natürlich auch für alle anderen Dreiecke, die von zwei Fünfeckseiten und einer Diagonalen gebildet werden (Bild 14b). Folglich hat der jeweils dritte Winkel in diesen fünf Dreiecken die Größe 108° und der Winkel, der von zwei Diagonalen eingeschlossen wird, die von einem Eckpunkt ausgehen, die Größe 36° (Bild 14c). Damit ergibt sich, dass $|\angle AB_1E| = 72°$ ist (Bild 14d). Folglich ist AB_1E ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AE| = |AB_1|$. Natürlich ist dann auch $|AB_1| = |CD_1|$, woraus auch $|AC_1| = |DB_1|$ folgt.
Schließlich ist jede Diagonale parallel zu einer Fünfeckseite und $A_1B_1C_1D_1E_1$ ist ebenfalls ein regelmäßiges Fünfeck.

In diesem kleineren Fünfeck können wieder die Diagonalen eingezeichnet werden (Bild 15), und es entsteht dadurch ein weiteres regelmäßiges Fünfeck $A_2B_2C_2D_2E_2$ im Inneren. Dieser Prozess lässt sich beliebig lange fortsetzten, ohne das man ein Ende erreicht.

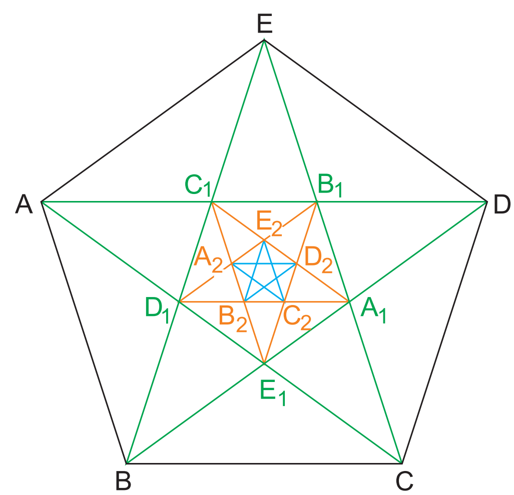


Bild 15: Ein regelmäßiges Fünfeck mit Diagonalen, mit Diagonalen ... .

Nun zur Wechselwegnahme: Wir betrachten die Fünfeckseite AE und die Diagonale AD. Wir tragen auf AD von A aus in Richtung D die Strecke AE ab. Da $|AE| = |AB_1|$ ist, bleibt DB_1 übrig. Nun wird DB_1 von AB_1 weggenommen. Da $|DB_1| = |AC_1|$ ist, bleibt C_1B_1 übrig. Nun muss C_1B_1 von AC_1 weggenommen werden.
Weil im Viereck $AC_1A_1D_1$ gegenüberliegende Seiten parallel zueinander sind, ist dieses Viereck ein Parallelogramm (sogar ein Rhombus) und damit ist $|AC_1| = |D_1A_1|$, also auch $|AC_1| = |C_1A_1|$.
Damit bedeutet das Wegnehmen von C_1B_1 von AC_1, dass im Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$ die Seite C_1B_1 von der Diagonalen C_1A_1 weggenommen werden muss. Damit beginnt der Prozess, den wir im Fünfeck $ABCDE$ begonnen haben von vorn, jetzt im Fünfeck $A_1B_1C_1D_1E_1$.
Da dieser Prozess nie endet, gibt es kein gemeinsames Maß für eine Seite eines regelmäßigen Fünfecks und einer Diagonalen dieses Fünfecks. Das Verhältnis $|AE| : |AD|$ lässt sich damit nicht als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausdrücken, es ist nicht rational, das Verhältnis ist irrational. Diese Entdeckung hat die pythagoreische Mathematik/Philosophie in eine tiefe Krise gestürzt, da die Überzeugung der Pythagoreer „Alles ist Zahl“ (alles lässt sich durch natürliche Zahlen 1, 2, 3, ... ausdrücken) nicht mehr stimmte.

Aber zurück zu unserem regelmäßigen Fünfeck (Bild 15). Dort sind die beiden Dreiecke AC_1E und ADE ähnlich zueinander. Folglich ist $\frac{|AC_1|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|AD|}$. Weil $|AC_1| = |DB_1|$ und $|AE| = |AB_1|$ ist, folgt $\frac{|DB_1|}{|AB_1|} = \frac{|AB_1|}{|AD|}$. Das bedeutet aber, dass B_1 die Strecke AD im Goldenen Schnitt teilt. Auch dies war nach [3] HIPPASOS bekannt, auch wenn er es nicht so bezeichnete. Vermutlich wurde diese spezielle Streckenteilung als *Teilung nach äußerem und mittlerem Verhältnis* bezeichnet, so wie es später EUKLID im 6. Buch (Definition 3) (vgl. [7]) seiner Elemente definierte. In [7] wird der Begriff *stetige Teilung* benutzt, aber in den Anmerkungen dazu steht, dass der griechische Text von einer *Teilung nach äußerem und mittlerem Verhältnis* spricht.
Damit teilt aber jede Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks jede andere Diagonale dieses Fünfecks im Goldenen Schnitt.

Die Verhältnisgleichung $\frac{|DB_1|}{|AB_1|} = \frac{|AB_1|}{|AD|}$ können wir auch etwas verändern:

$\frac{|DB_1|}{|AB_1|} = \frac{1}{\frac{|AD|}{|AB_1|}} = \frac{1}{\frac{|AB_1|+|DB_1|}{|AB_1|}} = \frac{1}{1+\frac{|DB_1|}{|AB_1|}}$, also $\frac{|DB_1|}{|AB_1|} = \frac{1}{1+\frac{|DB_1|}{|AB_1|}}$.

Hier können wir $\frac{|DB_1|}{|AB_1|}$ immer wieder ersetzen, sodass wir zu dem unendlichen Kettenbruch

$$\frac{|DB_1|}{|AB_1|} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}}} \text{ gelangen.} \tag{4}$$

Weil mit unserer Bezeichnung $\Phi = \frac{|DB_1|}{|AB_1|}$ ist, gibt der Kettenbuch (4) eine Berechnungsmöglichkeit für Φ an.

Weitere Konstruktionen

1. Eine einfache Konstruktion zur Teilung einer Strecke AB im Goldenen Schnitt haben wir bereits oben (vgl. Bilder 9 und 10) kennengelernt. Diese Konstruktion geht auf HERON (vermutlich 1. Jahrhundert u.Z.) zurück (vgl. [10]).

2. Eine weitere Konstruktion stammt von EUKLID (etwa 300 v.u.Z.). In seinen Elementen, sechstes Buch, §30 (vgl. [7]), wird die Aufgabe gestellt, eine gegebene Strecke AB stetig (d.h. im Goldenen Schnitt) zu teilen.
Zuerst wird über AB das Quadrat $ABCD$ gezeichnet (Bild 16a). Dann muss man ein Rechteck finden, das am Strahl DA^+ anliegt, den selben Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat und der überstehende Teil selbst ein Quadrat ist.

Wenn das Rechteck $EFGD$ (Bild 16a) gefunden ist, dann bezeichnen wir den Schnittpunkt von FG mit AB mit P. Weil $|ABCD| = |EFGD|$ ist und das Rechteck $APGD$ zu beiden Figuren gehört, ist natürlich $|PBCG| = |AEFP|$. Außerdem ist $AEFP$ ein Quadrat.
Aus $|PBCG| = |AEFP|$ folgt $|PG| \cdot |PB| = |AP| \cdot |AE|$.
Mit $|PG| = |AB|$ und $|AE| = |AP|$ erhalten wir $|AB| \cdot |PB| = |AP| \cdot |AP|$, woraus sofort

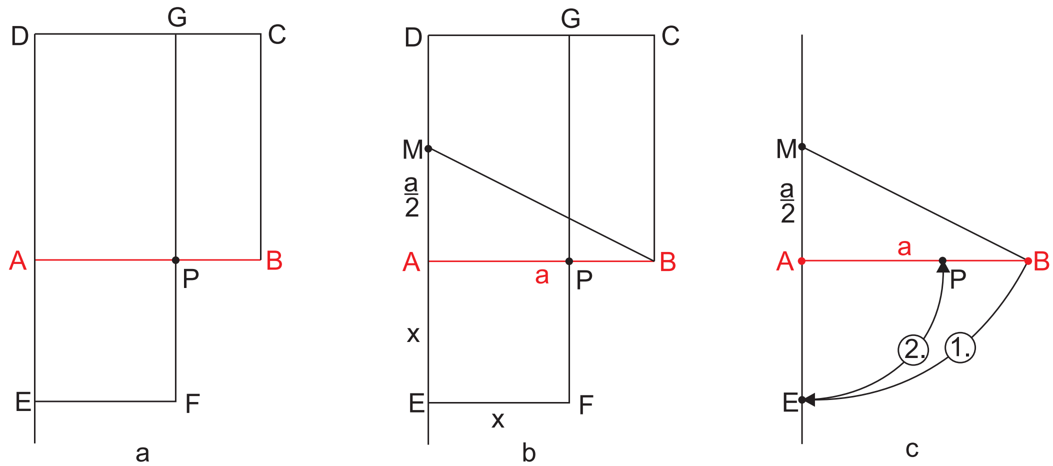


Bild 16: Goldener Schnitt nach EUKLID.

$\frac{|PB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|AB|}$ folgt.
Da P ein innerer Punkt von AB ist, ist $|AB| > |AP|$.
Damit folgt aber auch aus $|AB| \cdot |PB| = |AP| \cdot |AP|$, dass $|AP| > |PB|$ sein muss.
Damit ergibt sich insgesamt, dass P die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt.

Bleibt noch die Frage zu klären, wie man das Rechteck $DEFG$ findet. Um dies herauszufinden bezeichnen wir die Seitenlängen der Quadrate $ABCD$ und $AEFP$ mit a bzw. x (Bild 16b). Wegen der Flächengleichheit von $ABCD$ und $DEFG$ muss dann $a^2 = (a + x) \cdot x$, also $x^2 + ax - a^2 = 0$ gelten. Daraus erhalten wir sofort $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$. Da $x > 0$ ist, ist nur $x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$ möglich. Wir erhalten damit $x + \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Eine Strecke mit der Länge $x + \frac{a}{2}$ finden wir in unserer Konstruktion sehr schnell, indem wir den Mittelpunkt M von AD bestimmen. Dann ist $|ME| = x + \frac{a}{2}$. Und für eine Strecke mit der Länge $\frac{a}{2}\sqrt{5}$ betrachten wir das bei A rechtwinklige Dreieck ABM. Dort gilt nämlich mit dem Satz des PYTHAGORAS $|BM|^2 = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$, womit $|ME| = |MB|$ folgt. Damit lässt sich der Punkt E nun leicht konstruieren.

Damit ergibt sich aber auch eine verkürzte Konstruktion für das Teilen der Strecke AB im Goldenen Schnitt (Bild 16c). Dazu wird in A die Senkrechte auf AB gezeichnet. M ist dann ein Punkt auf dieser Senkrechten mit $|AM|{=}\frac{1}{2}a$. Der Kreis um M durch B schneidet den Strahl MA^+ in E. Der Kreis um A durch E schneidet AB im gesuchten Punkt P, der AB im Goldenen Schnitt teilt.

3. Die nun folgenede Konstruktion stammt von dem österreichischen Künstler KURT HOFSTETTER (1959), der diese 2005 in [5] veröffentlichte (vgl. auch [10]).
Gegeben sei eine Strecke AB. Um A und B zeichnen wir jeweils den Kreis mit dem Radius $|AB|$. Diese beiden Kreise schneiden sich in C und D (Bild 17a). Die Gerade durch C und D ist die Mittelsenkrechte von AB und schneidet AB im Mittelpunkt M. Um M zeichnen wir einen weiteren Kreis mit dem Radius $|AB|$, der den bereits gezeichneten Kreis um B in E schneidet, wobei E auf der selben Seite von AB liegen soll wie C. Nun verbinden wir E mit D und bezeichnen den Schnittpunkt mit AB mit P. P teilt AB im Goldenen Schnitt.
Die Richtigkeit dieser Behauptung beweisen wir jetzt.

Dazu bezeichnen wir die Länge von AB mit a (Bild 17b). Aufgrund der Konstruktion ist ABD ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a und MBE ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis MB ($|MB| = \frac{a}{2}$) und den Schenkeln ME und BE, die jeweils die Länge a haben.
Das Lot von E auf MB hat den Fußpunkt N. Weil MBE gleichschenklig ist, ist N der Mittelpunkt von MB. Weiterhin ist $h_2 = EN$ die Höhe dieses Dreiecks auf der Seite MB.
Im Dreieck ABD ist $h_1 = MD$ die Dreieckshöhe auf der Seite SB.
Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhalten wir

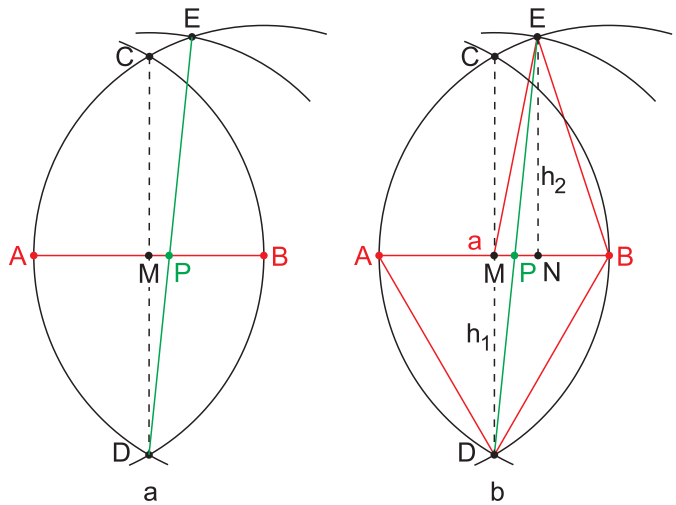


Bild 17: Goldener Schnitt nach Kurt Hofstetter.

für $h_1^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}a^2$ (im Dreieck AMD), woraus $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ folgt und
für $h_2^2 = a^2 - (\frac{a}{4})^2 = \frac{15}{16}a^2$ (im Dreieck MNE), woraus $h_2 = \frac{a}{4}\sqrt{15} = \frac{a}{4}\sqrt{3}\sqrt{5}$ folgt.
Wegen des Strahlensatzes mit Zentrum P gilt $\frac{|PN|}{|PM|} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$, also $|PN| = \frac{1}{2}\sqrt{5}|PM|$.
Weil $|MP| + |NP| = \frac{a}{4}$ ist, erhalten wir $|MP|(1 + \frac{1}{2}\sqrt{5}) = \frac{a}{4}$, also $|MP| = \frac{a}{2(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}-2}{2}a$.
Weil $|PN| = \frac{1}{2}\sqrt{5}|PM|$ ist, erhalten wir $|PN| = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{2}a = \frac{5-2\sqrt{5}}{4}a$.

Nun berechnen wir $\frac{|PB|}{|AP|} = \frac{|PN|+\frac{a}{4}}{|PM|+\frac{a}{2}} = \frac{\frac{5-2\sqrt{5}}{4}a+\frac{1}{4}a}{\frac{\sqrt{5}-2}{2}a+\frac{1}{2}a} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|PM|+\frac{a}{2}}{a} = \frac{\frac{\sqrt{5}-2}{2}a+\frac{1}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
Damit ist aber $\frac{|PB|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|AB|}$. Weil $|PB| < |AP|$ ist, teilt P die Strecke AB, wie behauptet, im goldenen Schnitt.

4. Als Nächstes folgt eine Konstruktion, die 1982 von dem amerikanischen Künstler George Odom (1941 – 2010) entdeckt wurde. (vgl. [9]). Er betrachtete ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seuitenlänge $2a$ (Bild 17a). E und F sind die Mittelpunkte der Seiten AC bzw. BC und k der Umkreis dieses Dreiecks. Mit G wird der Schnittpunkt von EF^+ mit k bezeichnet. Dann teilt F die Strecke EG im Goldenen Schnitt.

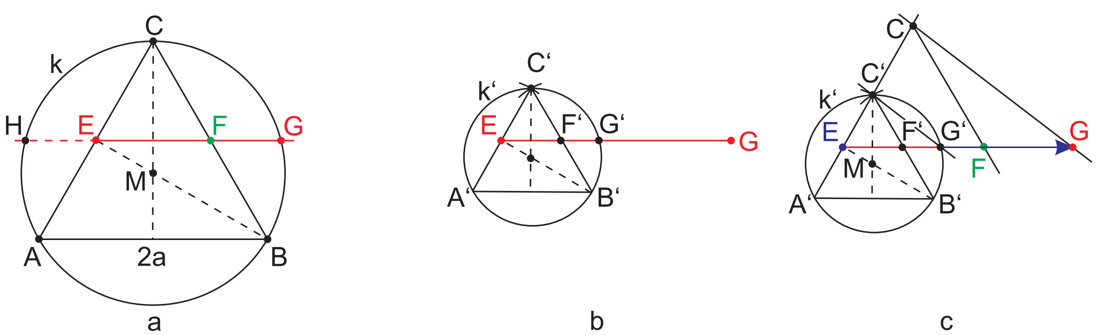


Bild 18: Konstruktion nach George Odom.

Zum Beweis dieser Behauptung bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von FE^+ mit k mit H.

Aus Symmetriegründen ist $|EH| = |FG|$ und wir bezeichnen diese Länge mit b. Aufgrund des Sehnensatzes ist dann $|FG| \cdot |FH| = |FC| \cdot |FB|$, also $b \cdot (a+b) = a \cdot a$, woraus $b^2 + ab - a^2 = 0$ folgt. Also ist $b_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$. Weil $b > 0$ ist, ist $b = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$. Damit wird $\frac{|FG|}{|EF} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und $\frac{|EF|}{|EG} = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}a} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Also ist $\frac{|FG|}{|EF} = \frac{|EF|}{|EG|}$. Da außerdem $|FG| < |EF|$ ist, teilt der Punkt F die Strecke SG im Goldenen Schnitt, wie behauptet.

Damit können wir zu einer gegebenen Strecke EF einen Punkt G auf EF^+ so konstruieren, dass F die Strecke EG im Goldenen Schnitt teilt.

Aber wir können diese Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks auch zur Konstruktion der Teilung einer gegebenen Strecke EG im Goldenen Schnitt nutzen (Bild 18b). Wir wählen auf EG einen beliebigen Punkt F' und konstruieren über EF' ein gleichseitiges Dreieck $EF'C'$. Dieses Dreieck erweitern wir zum gleichseitigen Dreieck $A'B'C'$, wobei E auf $C'A'$ und F' auf $C'B'$ liegen und $|C'A'| = 2|C'E|$ ist. k' ist der Umkreis von $A'B'C'$, der EF'^+ und G' schneidet.
Nun bestimmen E (als Zentrum) und $\overrightarrow{G'G}$ eine zentrische Streckung (Bild 18c). Zeichnen wir durch G die Parallele zu $G'C'$, so schneidet diese Parallele die Gerade $g(A'C')$ durch A' und C' in C. Dann ist C der Bildpunkt von C' bei dieser zentrischen Streckung. Nun zeichnen wir durch C die Parallele zu $C'B'$, die EG in F, dem Bildpunkt von F', schneidet. Da F' die Strecke EG' im Goldenen Schnitt teilt, teilt auch F die Strecke EG im Goldenen Schnitt.

5. Es folgt noch eine Konstruktion für den Goldenen Schnitt außerhalb der Strecke AB (Bild 19).

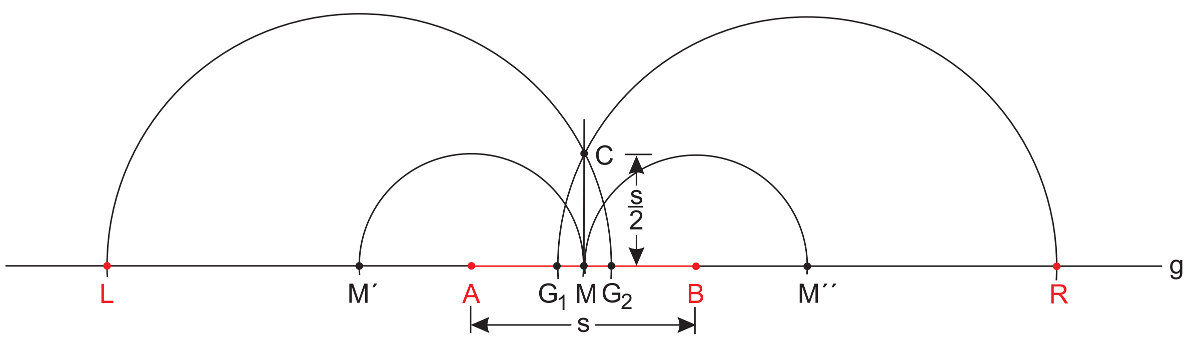


Bild 19: Konstruktion zur äußeren Teilung im Goldenen Schnitt.

Gegeben sei eine Strecke AB mit $|AB| = s > 0$ und M ist der Mittelpunkt von AB.
In M errichten wir die Senkrechte auf AB und legen darauf einen Punkt C mit $|MC| = \frac{s}{2}$ fest.
Um A zeichnen wir einen Kreis durch M der AB^- in M' schneidet.
Um B zeichnen wir einen Kreis durch M der BA^- in M'' schneidet.
Der Kreis um M' durch C schneidet AB^- in L und AB in G_2.
Der Kreis um M'' durch C schneidet BA^- in R und AB in G_1.

Dann ist $|M'C| = |M''C| = \frac{s}{2}\sqrt{5}$ und
$TV(AB, L) = \frac{|AL|}{|BL|} = \frac{\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\sqrt{5}}{\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\sqrt{5}+s} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+3} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

$TV(AB,R) = \frac{|AR|}{|BR|} = \frac{\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\sqrt{5}+s}{\frac{s}{2}+\frac{s}{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
L und R teilen damit AB außerhalb im Goldenen Schnitt.

Wir rechnen weiter:
$TV(AB,G_1) = \frac{|AG_1|}{|BG_1|} = \frac{s+\frac{s}{2}-\frac{s}{2}\sqrt{5}}{\frac{s}{2}\sqrt{5}-\frac{s}{2}} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und
$TV(AB,G_2) = \frac{|AG_2|}{|BG_2|} = \frac{\frac{s}{2}\sqrt{5}-\frac{s}{2}}{s+\frac{s}{2}-\frac{s}{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Damit teilen G_1 und G_2 die Strecke AB innerhalb im Goldenen Schnitt. Mit der angegebenen Konstruktion können demzufolge nicht nur die äußeren, sondern auch die inneren Teilpunkte bestimmt werden, die eine Strecke im Goldenen Schnitt teilen.

6. Zum Abschluss dieses Abschnittes geben wir noch eine Konstruktion an, wie wir zu einer gegebenen Strecke PB auf PB^- einen Punkt A so finden, dass P die Strecke AB im Goldenen Schnitt teilt. Dabei ist klar, dass es genau zwei solche Punkte geben muss: Einer, der näher bei P liegt als B, und einer, der weiter weg von P liegt als P.

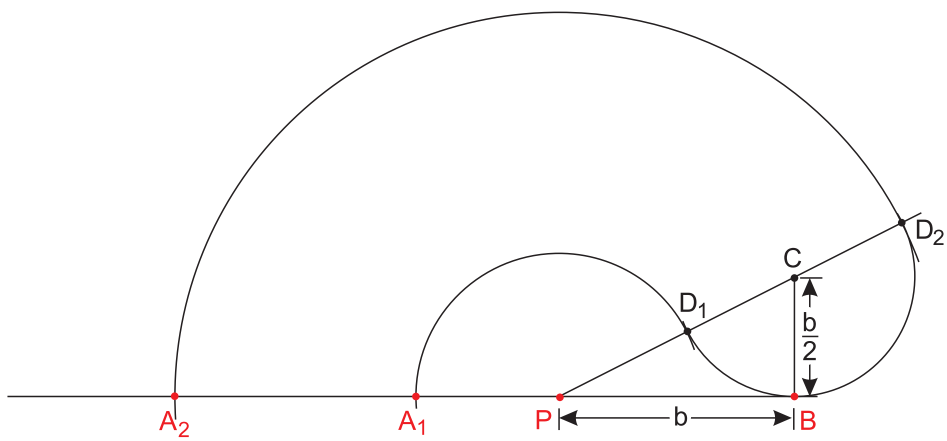


Bild 20: Konstruktion zur äußeren Teilung im Goldenen Schnitt.

Gegeben ist also eine Strecke PB, $|PB| = b > 0$. Dann errichten wir in B die Senkrechte auf PB und bestimmen auf ihr einen Punkt C so, dass $|| = \frac{b}{2}$ ist (Bild 20). Nun zeichnen wir eine Gerade durch P und C und einen Kreis um C durch B. Dieser Kreis schneidet die Gerade $g(PC)$ in den Punkten D_1 und $\S D_2$, wobei D_1 auf der Strecke PC liegen soll. Als nächstes zeichnen wir zwei Kreise um P die durch D_1 bzw. D_2 gehen. Der Kreis durch D_1 schneidet PB^- in A_1 und der durch D_2 schneidet PB^- in A_2. A_1 und A_2 sind die beiden gesuchten Punkte, was wir durch die folgende Rechnung bestätigen. Unter Berücksichtigung von $|PC| = \frac{b}{2}\sqrt{5}$ gilt:
$TV(A_1B,P) = \frac{|A_1P|}{|BP|} = \frac{\frac{b}{2}\sqrt{5}-\frac{b}{2}}{b} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und
$TV(A_2B,P) = \frac{|A_2P|}{|BP|} = \frac{\frac{b}{2}\sqrt{5}-\frac{b}{2}+\frac{b}{2}}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
Damit teilt aber P sowohl die Strecke A_1P als auch die Strecke A_2P im Goldenen Schnitt, wie behauptet. Zusätzlich können wir noch feststellen, dass $TV(A_2B,A_1) = \frac{|A_2A_1|}{|BA_1|} = \frac{b}{b+\frac{b}{2}\sqrt{5}-\frac{b}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Damit teilt aber auch A_1 die Strecke A_2B im Goldenen Schnitt.

Konstruktion des regelmäßigen Fünf- und Zehnecks

Die letzte Konstruktion können wir auch benutzen, um ein regelmäßiges Fünf- bzw. Zehneck zu konstruieren, wenn die Seitenlänge des Fünf- bzw. Zehnecks vorgegeben ist. Dazu bedenken wir, dass im regelmäßigen Fünfeck jede Diagonale jede andere Diagonale im Goldenen Schnitt teilt. Dies haben wir bereits bei den Betrachtungen zu Bild 15 gezeigt. In Bezug auf Bild 21 gilt dann z.B., dass C_1 die Strecke AD im Goldenen Schinitt teilt und zwar so, dass $TV(AD, C_1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Weiterhin ist $|DC_1| = |DE| = s_5$ die Seitenlänge des regelmäßigen Fünfecks. CDA ist ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem die Basis die Länge s_5 hat und die Schenkel Fünfeckdiagonalen sind.

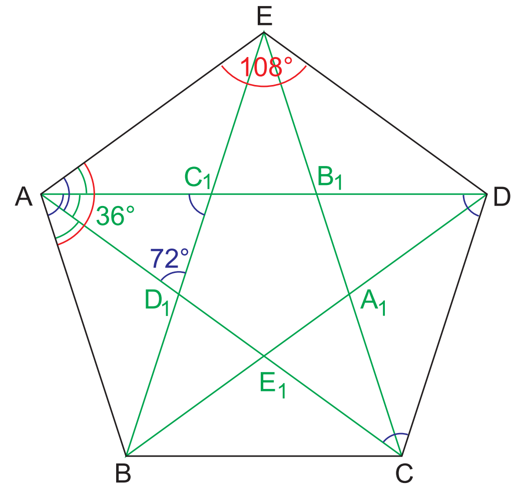
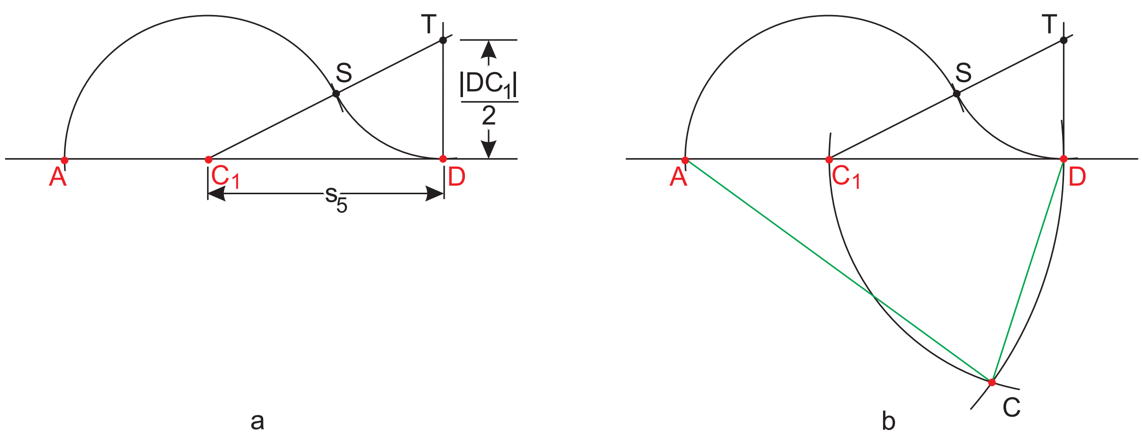


Bild 21: Regelmäßiges Fünfeck.

Nun wollen wir ein regelmäßiges Fünfeck konstruieren, dessen Seitenlänge s_5 vorgegeben ist. Dazu betrachten wir eine Strecke C_1D mit $|C_1D| = s_5$. Wir müssen nun auf C_1D^- einen Punkt A so finden, dass $TV(AD, C_1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist. Dazu benutzen wir die oben angegebene 6. Konstruktion.



Wir errichten auf C_1D in D die Senktrechte (Bild 22a) und bestimmen dort den Punkt T so, dass $|DT| = \frac{|DC_1|}{2}$ ist. Der Kreis um T durch D schneidet C_1T in S. Der Kreis um C_1 durch S schneidet C_1D^- in dem gesuchten Punkt A. Damit ist AD eine Diagonale des gesuchten regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge s_5.
Nun schneidet der Kreis um A durch D den Kreis um D durch C_1 in der Halbebene ADE^- im Punkt C (Bild 22b). Das Dreieck CDA ist daher gleichschenklig, wobei die Schenkel Diagonalen und die Basis eine Seite des gesuchten regelmäßigen Fünfecks ist. Als nächstes konstruieren wir die Mittelsenkrechten dieses Dreiecks, die sich im Punkt M

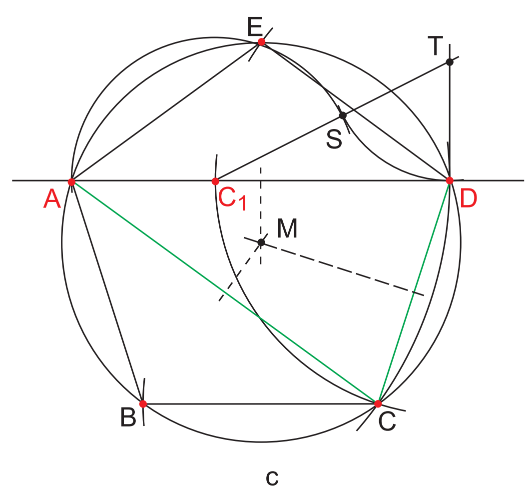


Bild 22: Regelmäßiges Fünfeck.

schneiden. M ist der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks CDA und damit auch des gesuchten regelmäßigen Fünfecks (Bild 22c). Nun müssen wir nur noch die Seitenlänge s_5 von C aus auf diesem Umkreis abtragen. Damit haben wir ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit der vorgegebenen Seitenlänge s_5 konstruiert.

Nun wollen wir ein regelmäßiges Zehneck mit vorgegebener Seitenlänge s_{10} konstruieren. Dazu betrachten wir Bild 23, in dem ein regelmäßiges Zehneck $P_1P_2...P_{10}$ zu sehen ist. Zusätzlich ist der Umkreis mit dem Mittelpunkt M eingezeichnet. r_{10} ist der Umkreisradius. Verbinden wir die Eckpunkte mit dem Mittelpunkt, so entstehen 10 zueinander kongruente gleichschenklige Dreiecke. s_{10} ist die Länge der Basis und r_{10} die Schenkellänge. Folglich schließen die Schenkel einen Winkel von 39° ein.
Ein solches gleichschenkliges Dreieck haben wir bereits eben bei der Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks konstruiert (vgl. Bild 22). Folglich teilt der Punkt C auf P_1M mit $|P_1C| = s_{10}$ die Strecke P_1M im Goldenen Schnitt und es gilt $TV(MP_1, C) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

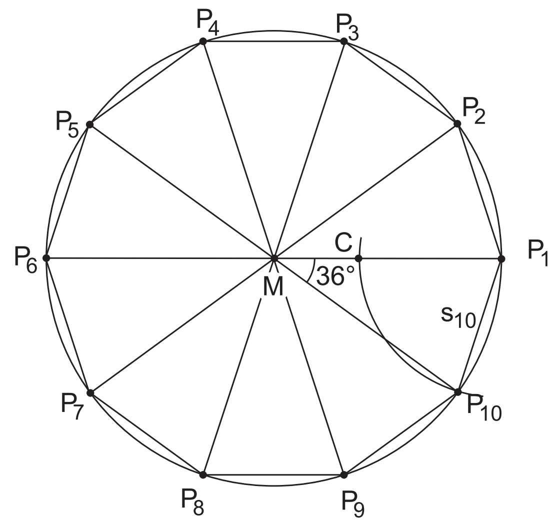


Bild 23: Regelmäßiges Zehneck.

Ist nun die Seitenlänge s_{10} für ein regelmäßiges Zehneck vorgegeben, so zeichnen wir zuerst eine Strecke CP_1 mit $|CP_1|) = s_{10}$. Nun müssen wir auf CP_1^- einen Punkt M so bestimmen, dass $TV(MP_1, C) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt. Dies gelingt wieder mit der 6. Konstruktion von oben (Bild 24a). Dann ist $|MP_1| = r_{10}$.

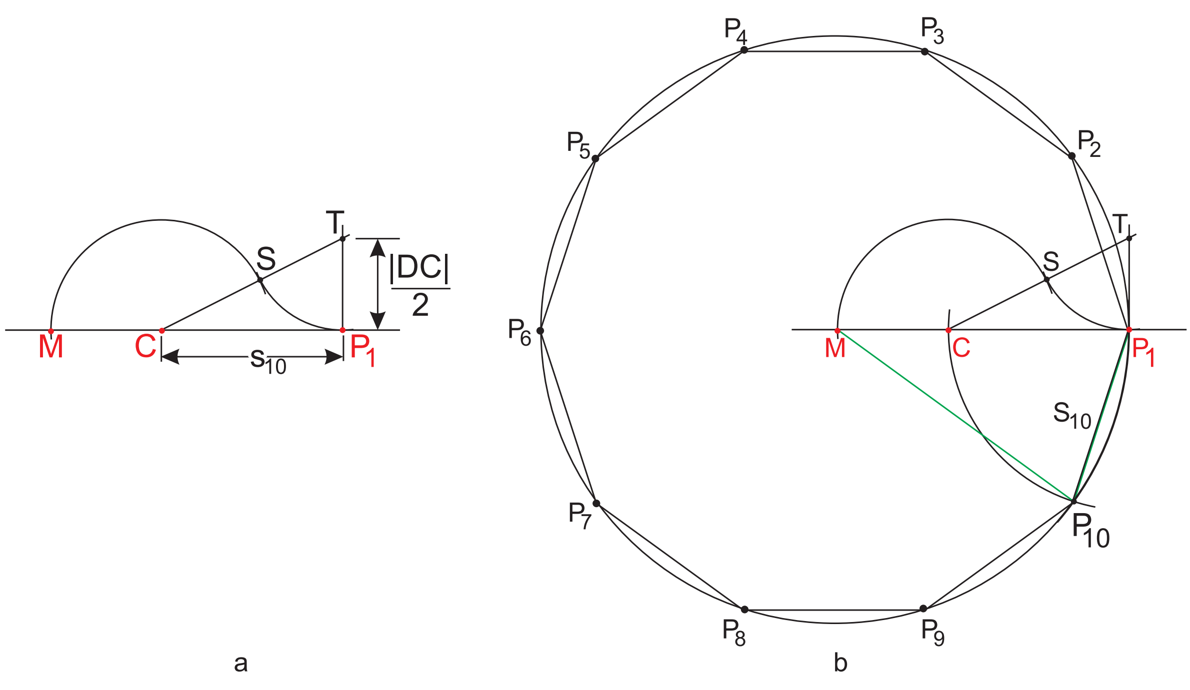


Bild 24: Konstruktion des regelmäßiges Zehnecks.

Nun zeichnen wir um M den Kreis durch P_1 und tragen auf ihm, bei P_1 beginnend, die Seitenlänge s_{10} der Reihe nach ab. So erhalten wir das gewünschte regelmäßige Zehneck mit vorgegebener Seitenlänge s_{10} (Bild 24b).

Zum Abschluss werden wir noch ein regelmäßiges Fünf- bzw. Zehneck in einen gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt$M$ und dem Radius r einbeschreiben.
Wir beginnen mit dem Zehneck. Auf dem Kreis wählen wir einen beliebigen Punkt P_1 und verbinden diesen mit dem Mittelpunkt (Bild 25a). Dann errichten wir auf MP_1 in M die Senkrechte und bestimmen dort einen Punkt T so, dass $|MT| = \frac{|MP_1|}{2} = \frac{r}{2}$ ist (vgl. 1. Konstruktion von oben). Der Kreis um T durch M schneidet TP_1 in S. Anschließend schneidet der Kreis um P_1 durch S die Strecke MP_1 in C. C teilt die Strecke MP_1 im Goldenen Schnitt, wobei $TV(MP_1, C) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt. Daher ist $|P_1C| = s_{10}$. Wir müssen diese Strecke nur noch von P_1 beginnend nacheinander auf dem Kreis abtragen. Dies ergibt ein regelmäßiges Zehneck $P_1P_2...P_9P_{10}$, das in den gegebenen Kreis einbeschrieben ist (Bild 25b).

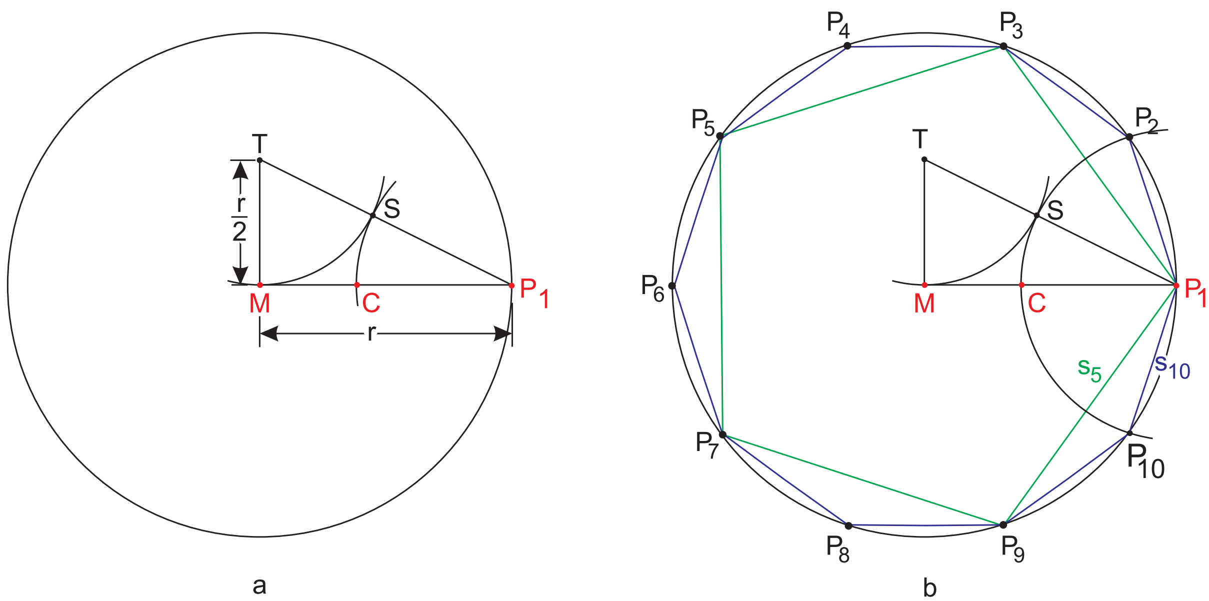


Bild 25: Konstruktion des regelmäßigen Fünf- bzw. Zehnecks, wenn der Umkreisradius gegeben ist.

Und nun suchen wir das einbeschriebene regelmäßige Fünfeck. Das haben wir schnell gefunden, indem wir von P_1 ausgehend jede zweite Ecke des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks nacheinander verbinden. So erhalten wir das regelmäßige Fünfeck $P_1P_3P_5P_7P_9$, das dem gegebenen Kreis einbeschrieben ist (Bild 25b).

Mit diesen Betrachtungen beenden wir unsere kurze Einführung zum Goldenen Schnitt. Wir wollen noch darauf hinweisen, dass es zu dieser Thematik noch sehr viel zu entdecken gibt. So bestehen Verbindungen zur Natur (z.B. die Anordnung von Blättern bei Pflanzen), zur Architektur (z.B. das Alte Rathaus in Leipzig), zur bildenden Kunst (z.B. die Monalisa bzw. die Aphrodite von Knidos), ... und natürlich zur Mathematik (z.B. zu den Fibonacci-Zahlen). Viel Spaß und Erfolg beim weiteren Entdecken.

Literatur

[1] Beutelspacher, Albrecht; Petri, Bernhard: *Der Goldene Schnitt*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1996.

[2] Flindner, Petrie: *Seventy years in Archaeology*. Henry Holt and Company, New York, 1932.

[3] Fritz, Kurt von: *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 46, No. 2, S. 242-264, 1945.

[4] Herrmann, Dietmar: Die antike Mathematik - Geschichte der Mathematik in Antike. Springer-Verlag GmbH Deutschland, 2024.

[5] Hofstetter, Kurt: *Divison of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass*. Forum Geometricorum, Volume 5 (2005), 135–136.

[6] Posamentier, Alfred S.; Lehmann, Ingmar: *The glorious golden ratio*. Prometheus Books, 2012.

[7] Thaler, Clemens: *Die Elemente von Euklid*, II. Teil, (Buch IV - VI). Akademische Verlagsgesellschaft M.B.H. Leipzig, 1933.

[8] Wikipedia: *Cheops-Pyramide*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Cheops-Pyramide` (Zugriff: 26.02.2026).

[9] Wikipedia: *Georg Odom*. `https://de.wikipedia.org/wiki/George_Odom` (Zugriff: 15.04.2026).

[10] Wikipedia: *Goldener Schnitt*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt` (Zugriff: 12.04.2026).

[11] Wikipedia: *Herodot*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Herodot` (Zugriff: 26.02.2026).

[12] Wikipedia: *Hippasos von Metapont*. `https://de.wikipedia.org/wiki/Hippasos_von_Metapont` (Zugriff: 26.02.2026).