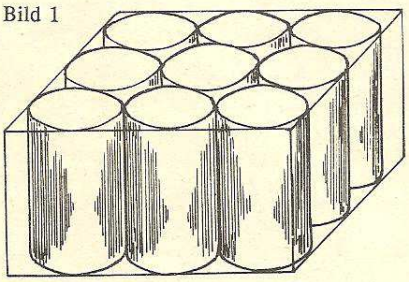
Punkt-anordnungen in einem Quadrat

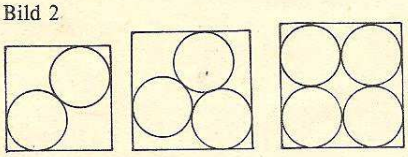
In einem Betrieb sollen kongruente zylinderförmige Werkstücke mit vorgegebenem Durchmesser d in Kisten mit quadratischer Grundfläche einschichtig verpackt werden. Es sind zu diesem Zwecke Kisten herzustellen, in denen man $n = 2, 3, 4, \ldots$ dieser Zylinder unterbringen kann, wobei die Grundflächen der Zylinder auf den Böden der Kisten stehen sollen (siehe Bild 1). Es ist die Forderung vernünftig, daß die Grundfläche der Kiste bei gegebenem n möglichst klein wird. Daraus leitet sich das folgende mathematische Problem ab.

Bild 1



Es werden diejenigen kleinsten Quadrate gesucht, in denen $n = 2, 3, 4, \ldots$ Kreise vom Durchmesser d Platz haben, ohne sich gegenseitig zu überlagern.
Wir bezeichnen mit Q_n' das kleinste Quadrat, in welches wir n Kreise mit dem Durchmesser d einlagern können, die Seitenlänge mit x_n'.
Im Bild 2 sind solche Quadrate für $n = 2$, 3, 4 dargestellt:

Bild 2



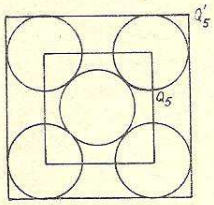
Aufgabe 1

Berechne die Seitenlängen der Quadrate Q_2', Q_3' und Q_4'! Bilde anschließend die Quotienten

$$d_n = \frac{n \cdot \frac{1}{4} d^2}{Q_n'}, \quad n = 2, 3, 4\,!$$

Für $n \geqq 6$ bereitet die Suche nach den kleinsten Quadraten Q_n' mitunter Mühe bzw. ist bisher für gewisse n nicht erfolgreich gewesen.
Es ist in solchen Fällen eine Arbeitsmethode der Mathematiker, aus der gegebenen Aufgabenstellung auf ein analoges Problem zu schließen, um zunächst die Lösung dieses Problems anzustreben. Falls die Lösung gelingt, werden dann Rückschlüsse auf die Ausgangsfrage angestrebt. Dieser Weg soll jetzt am Beispiel beschritten werden.
Dazu zeichnen wir zu dem Quadrat Q_n' ein Quadrat Q_n, das in Q_n' enthalten ist und dessen Seiten im Abstand $\frac{1}{2} d$ parallel zu den entsprechenden Seiten von Q_n' sind.
Die Seitenlänge ist $x_n = x_n' - d$.
Im Bild 3 ist diese Situation für $n = 5$ dargestellt. Wir erkennen, daß die Mittelpunkte der in Q_n' eingelagerten Kreise in Q_n enthalten sind.

Bild 3



Betrachten wir nun allgemein ein Quadrat Q, in dem n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ verteilt sind, wobei keine zwei Punkte P_i, P_j $(i \neq j)$ zusammenfallen sollen. Dann gibt es zwischen diesen n Punkten genau

$\frac{n(n-1)}{2}$ Abstände P_iP_j, $i < j$,

$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 2

Beweise diese Formel!
Den kleinsten dieser Abstände bezeichnen wir als Minimalabstand dieser Punktverteilung in dem Quadrat Q.
Den Begriff Minimalabstand können wir auf unser gestelltes Problem anwenden. Es entsteht der folgende Zusammenhang: Wenn Q_n' das kleinste Quadrat ist, in das n Kreise $K_1, K_2, \ldots, K_n$ vom Durchmesser d eingelagert werden können, dann ist das oben beschriebene Quadrat Q_n, das die Kreismittelpunkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ enthält, das kleinste Quadrat, in dem n Punkte mit dem Mindestabstand d verteilt werden können und umgedreht.

Aufgabe 3

Beweise diese Aussage!
Damit steht also die Aufgabe, das kleinste Quadrat Q_n zu bestimmen, das n Punkte $M_1, M_2, \ldots, M_n$ mit dem Mindestabstand d enthält.
Damit wir für verschiedene n in demselben Quadrat arbeiten können, betrachten wir zu der eben gestellten Aufgabe die äquivalente Aufgabe.
In einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 bestimme man eine solche Verteilung von n Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$, so daß der Mindestabstand a_n^* dieser Verteilung nicht kleiner ist als der größte Wert der Mindestabstände bei allen anderen Verteilungen der n Punkte in Q.

Aufgabe 4

Man mache sich diesen Sachverhalt an Bildern mit $n = 3$ klar.
Eine Verteilung mit dem Mindestabstand a_n^* nennen wir auch *beste Verteilung von n Punkten in dem Quadrat Q*.
Für $n = 2, 3, \ldots, 9$ wurden die besten Punktverteilungen von *J. Schaer* und *A. Meir* (USA) gefunden. Für $n = 16$ und $n = 25$ stammt die Lösung von *G. Wengerodt* (Erfurt). Bild 4 zeigt die besten Verteilungen für diese n.

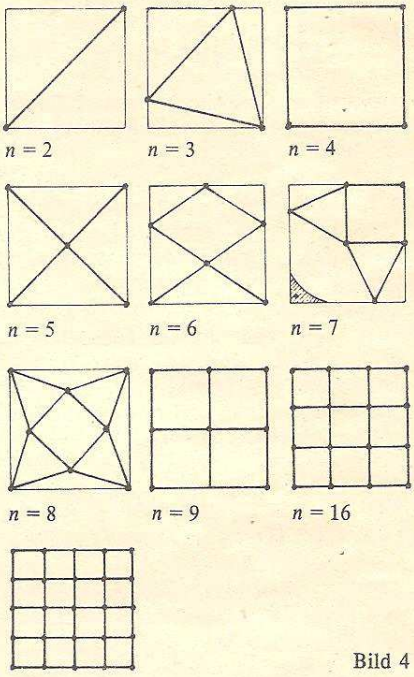


Bild 4

Bemerkenswert ist, daß für $n = 7$ ein Punkt in der schraffierten Fläche beweglich ist, obwohl eine beste Verteilung vorliegt.
Für die Beweise der besten Verteilungen von n Punkten in einem Quadrat nutzt man die Kontraposition des folgenden Satzes, der in der Literatur als *Basissatz* bezeichnet wird.
Ist $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ eine beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat, so liegt auf jeder Quadratseite mindestens ein Punkt von $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$.
Aus diesem Satz folgt sofort die beste Verteilung von $n = 2$ Punkten in dem Quadrat Q.

Aufgabe 5

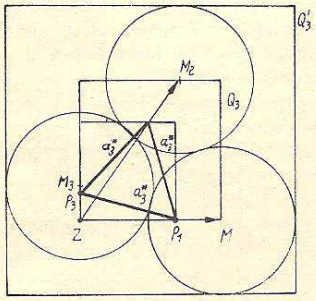
Beweise, daß $a_2^* = \sqrt{2}$ ist!
Für $n = 3$ und $n = 4$ sollen die Beweise in einem späteren Artikel vorgestellt werden.
Wir haben gesehen, daß bisher nur für sehr wenige Zahlen n die besten Verteilungen gefunden wurden.
Natürlich gibt es für viele andere n Vermutungen für beste Verteilungen dieser n Punkte in einem Quadrat Q.
Es steht also ganz allgemein die Aufgabe, möglichst gute Verteilungen von n Punk-

ten in einem Quadrat der Seitenlänge 1 zu suchen. Eine Orientierung gibt die folgende Tabelle, in der solche Vermutungen zusammengetragen sind.

n	a_n	a_n^*
2		$\sqrt{2}$
3		$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
4		1
5		$\sqrt{2}/2$
6		$\sqrt{13}/6$
7		$2(2-\sqrt{3})$
8		$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/2$
9		1/2
10	5/12	
11	0,398...	
12	$\sqrt{34}/15$	
13	0,36603...	
14	$2(4-\sqrt{3})/13$	
15	$4/(8+\sqrt{6}+\sqrt{2})$	
16		1/3
17	0,3045...	
18	$\sqrt{13}/12$	
19	0,290	
20	$3/8-\sqrt{2}/16$	
21	0,2704...	
22	$2-\sqrt{3}$	
23	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	
24	$1/(2+\sqrt{3/2}+1/\sqrt{2})$	
25		1/4

Wenn es nun für ein gegebenes n gelingt, die beste Verteilung von n Punkten in einem Quadrat Q der Seitenlänge 1 zu finden, so haben wir mit der folgenden Überlegung auch das Ausgangsproblem gelöst. Das zum Quadrat mit der Seitenlänge 1 gesuchte ähnliche Quadrat Q mit der Seitenlänge x_n erhält man durch zentrische Streckung mit dem Streckfaktor $t = \frac{d}{a_n^*}$ und dem Zentrum in einem Eckpunkt (Bild 5 zeigt den Sachverhalt für $n = 3$).

Bild 5



Die gesuchte minimale Grundfläche der quadratischen Kiste hat dann die Seitenlänge $x_n' = x_n + d$, und das anfangs gestellte Problem ist über diesen *Umweg* gelöst.

Die in Aufgabe 1 für $n = 2, 3, 4$ bestimmten Werte d_n geben Dichten der Kreisanordnungen in den Quadraten Q_n' an und sind damit Zahlenwerte für die Güte der Platzausnutzung in den Kisten. Für größer werdendes n streben die Werte d_n gegen $\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9068\ldots$.

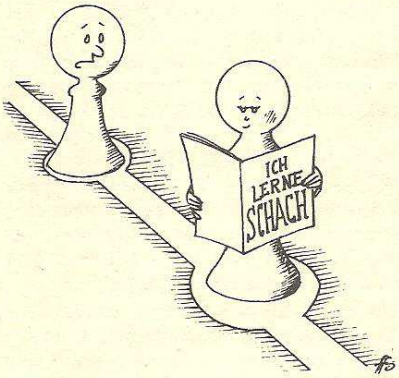
Auf diesen Sachverhalt werden wir in einem späteren Beitrag zurückkommen.

Den Abschluß dieses Beitrages bildet eine Aufgabe, zu deren Lösung man die geschilderte Methode verwenden kann.

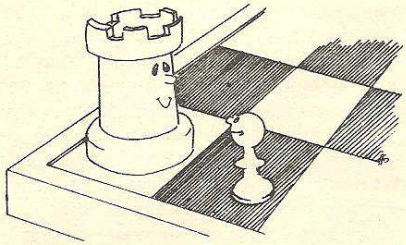
Aufgabe 6

Kann man in einem Quadrat der Seitenlänge 7 cm eine Verteilung von 26 Punkten mit dem Mindestabstand 2 cm finden?

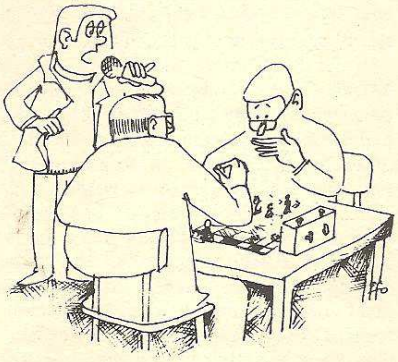
K. Kirchner/M. Schmitz



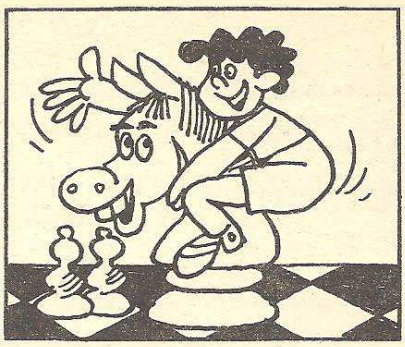
Gib es doch zu, du willst nicht mehr *Mensch ärgere dich nicht* spielen.



Darf ich mal 'raufkommen?

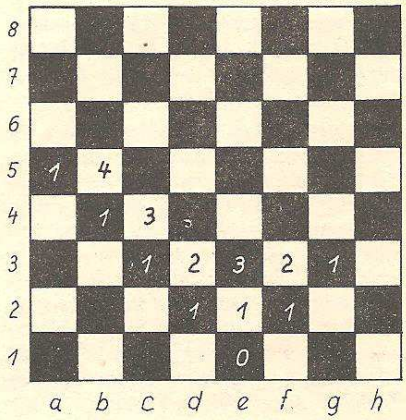


... und jetzt bekommt der Läufer die rote Karte, und Weiß hat nur noch vier Mann auf dem Feld.



Die vielen Wege des Königs

Die Frage, in wieviel Zügen und auf wieviel verschiedenen Wegen ein König von einem bestimmten Feld des Schachbretts auf ein anderes gelangen kann, ist recht interessant. Als Beispiel diene der einfache Fall, daß der König auf kürzestem Wege von e1 nach e8 wandert. Es ist leicht zu sehen, daß die Mindestanzahl der Züge 7 beträgt. Wie groß ist aber die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen?



Mittels einer einfachen Methode kann man die Anzahl der Wege wie folgt auszählen:

Die Felder d2, e2 und f2 bekommen eine 1, denn sie sind von e1 in 1 Zug nur auf 1 Weg zu erreichen. Das Feld c3 erhält ebenfalls eine 1, denn es besitzt nur 1 Zugangsfeld (d2), das selber nur eine 1 trägt. Hingegen gehören zu dem Feld d3 2 Zugangsfelder d2 und e2. Es ist auf zwei Wegen erreichbar und bekommt daher eine 2. Entsprechend erhält das Feld e3 eine 3, und in dieser Weise teilt man allen entfernteren Feldern eine Zahl zu, die jeweils aus der Summe der Zahlen der Zugangsfelder besteht. In dem Diagramm sind schon einige Werte eingetragen.

Nach der vorgegebenen Methode ist der Wert des Feldes e8 zu ermitteln! Dieser Wert gibt die Anzahl der möglichen Wege des Königs, in 7 Zügen von e1 nach e8 zu gelangen, an.

H. Rüdiger