

MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de

September 2017

Ein modularer Ring mit 11 Ecken

Michael Schmitz

In [2], [3] und [4] haben wir bereits verschiedene regelmäßige n-Ecke aus Modulen zusammengesetzt. Dazu kam die Anregung aus [1], wo ein modularer Achteckring vorgestellt wurde.

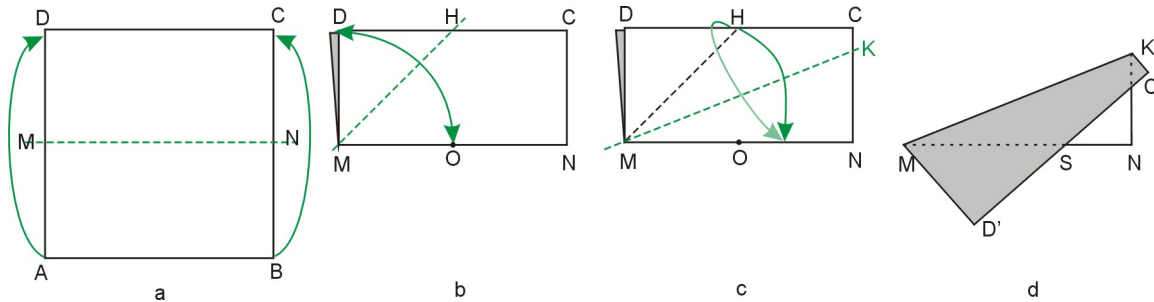


Abbildung 1: Der Faltprozess für das Achteckmodul

Durch Veränderung des dort verwendeten Moduls entstanden neue Module für andere regelmäßige n-Ecke. Abb. 1 zeigt noch einmal das Falten des Moduls für ein regelmäßiges Achteck und Abb. 2 die aus acht Modulen bestehende fertige Figur.

Wir wollen hier ein Modul, das ähnlich zu den bisher verwendeten Modulen ist, entwerfen, sodass wir aus 11 solcher Module ein regelmäßiges 11-Eck zusammensetzen können. Dabei bedenken wir, dass ein regelmäßiges 11-Eck nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Auch unser Modul wird nur eine gute Näherung für das regelmäßige 11-Eck liefern. In Abb. 14 ist das Ergebnis zu sehen.

Zuerst sehen wir uns ein regelmäßiges 11-Eck an (vgl. Abb. 3) und bestimmen dort die Größe des zugehörigen Innenwinkels φ_{11} .

Weil sich ein regelmäßiges 11-Eck aus 11 untereinander kongruenten und gleichschenkligen Dreiecken zusammensetzt, hat der Öffnungswinkel α_{11} eines solchen Dreiecks die Größe $\frac{360^\circ}{11}$. Damit wird aber $\varphi_{11} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{11} = \frac{9 \cdot 180^\circ}{11} = \frac{1620}{11} = 147,27^\circ$.

Damit ist das Ziel klar. Wir wollen ein quadratisches Faltpapier $ABCD$ zuerst an der zu AB parallelen Mittellinie MN zu einem Rechteck $MNCD$ falten und dann auf NC einen Punkt K so bestimmen (vgl. Abb. 4), dass die Größe des Winkels $\angle NSD'$ den Wert $147,27^\circ$ möglichst gut annähert.

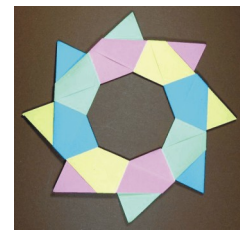


Abbildung 2: Regelmäßiges Achteck

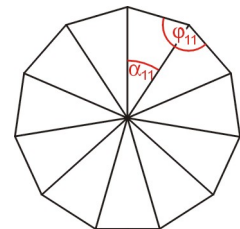


Abbildung 3: Regelmäßiges 11-Eck

Dazu bedenken wir: Wenn $|\angle NSD'| = 147,27^\circ$ sein soll, dann muss $|\angle MSD'| = 32,72^\circ$ und folglich $|\angle D'MN| = 57,27^\circ$ sein. Daraus ergibt sich, dass $|\angle D'MD| = 90^\circ + 57,27^\circ = 147,27^\circ$ und folglich $|\angle D'MK| = |\angle KMD| = 73,63^\circ$ ist. Also ist $|\angle NMK| = 16,36^\circ$.

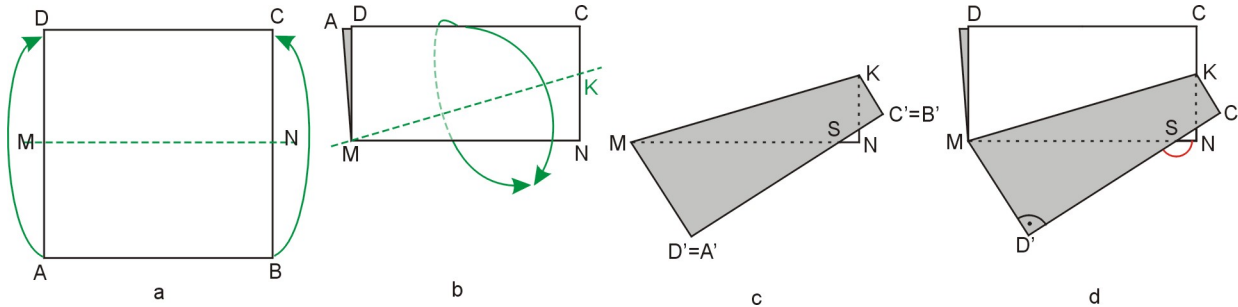


Abbildung 4: Überlegungen zum 11-Eck Modul

Nun versuchen wir einen dieser Winkel durch Falten im Rechteck $MNCD$ möglichst gut anzunähern (vgl. Abb. 5). Nach mehreren Experimenten ergab sich die folgende Konstruktion: Im Rechteck $MNCD$ mit den Seitenlängen a und $\frac{a}{2}$ falten wir zuerst die zu Mittellinie, die zu MN parallel ist. Nun falten wir D so auf diese Mittellinie, dass die Faltlinie durch M geht. Dadurch entsteht der Punkt F auf CD und es ist $|\angle NMF| = 60^\circ$. Die Winkelhalbierende dieses Winkels nennen wir 30° -Linie, da diese mit MN einen Winkel der Größe 30° einschließt.

Nun falten wir M auf C , wodurch die Mittelsenkrechte der Diagonalen MC entsteht. Diese Mittelsenkrechte geht natürlich durch den Mittelpunkt Z des Rechteckes und schneidet die 30° -Linie im Punkt S . Von S fallen wir das Lot auf MN . Dieses Lot schneidet die Mittellinie im Punkt S^* . Wir zeigen nun, dass $|\angle MNS^*| \approx 27,27^\circ$ ist, woraus $|\angle S^*MF| \approx 32,73^\circ$ folgt. Dies ist aber eine sehr gute Annäherung an $32,72^\circ$.

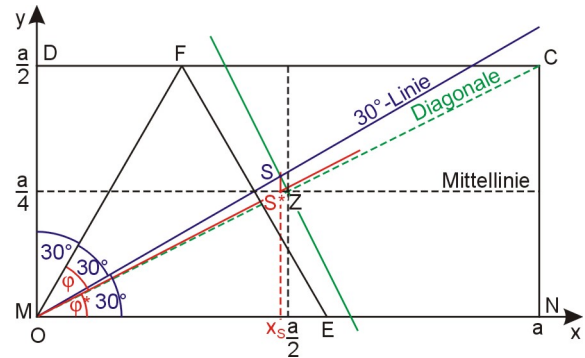


Abbildung 5:

Um die Größe des Winkels $\angle S^*MF$ zu bestimmen, benötigen wir die Gleichung der 30° -Linie: $y = \tan 30^\circ \cdot x$. Außerdem benötigen wir die Gleichung der Mittelsenkrechten der Diagonalen MC . Da diese Diagonale die Gleichung $y = \frac{1}{2} \cdot x$ hat, ergibt für die Mittelsenkrechte der Anstieg -2 . Da diese Mittelsenkrechte durch den Punkt $Z(\frac{a}{2}, \frac{a}{4})$ geht, erhalten wir für die zugehörige Gleichung $y = -2 \cdot x + \frac{5}{4}a$.

Bezeichnen wir mit x_S und y_S die Koordinaten des Schnittpunktes S der 30° -Linie mit der Mittelsenkrechten der Diagonalen, so erhalten wir $\tan 30^\circ \cdot x_S = -2 \cdot x_S + \frac{5}{4}a$.

Daraus ergibt sich $x_S = \frac{\frac{5}{4}a}{2+\tan 30^\circ}$ und mit $\tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ folgt $x_S = \frac{15a}{4(6+\sqrt{3})}$.

Nun können wir die Größe des Winkels $\varphi^* = \angle NMS^*$ im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse MS^* und den Kathetenlängen x_S und $\frac{a}{4}$ berechnen. Es gilt $\tan \varphi^* = \frac{\frac{a}{4}}{x_S} = \frac{6+\sqrt{3}}{15}$. Daraus ergibt sich $\varphi^* = 27,2697\dots^\circ$ und schließlich $\varphi = 60^\circ - \varphi^* = 32,7302\dots^\circ$. Der Winkel φ ist damit tatsächlich eine sehr gute Näherung für den Zentriwinkel im regelmäßigen 11-Eck.

Zum Falten des 11-Eck Moduls muss der Winkel φ an MN anliegen. Dieser Winkel muss dann nur noch halbiert werden, um den gesuchten Punkt K auf NC zu bestimmen.

Um dies zu erreichen, spiegeln wir die Figur aus Abb. 5 an der 30° -Linie. Dabei geht E nach F und

Die Punkte E' und F' lassen sich leicht bestimmen und damit auch die Mittellinie. Auf dieser Mittellinie liegt auch der noch zu bestimmende Mittelpunkt Z' des Rechtecks $MD'C'N'$.

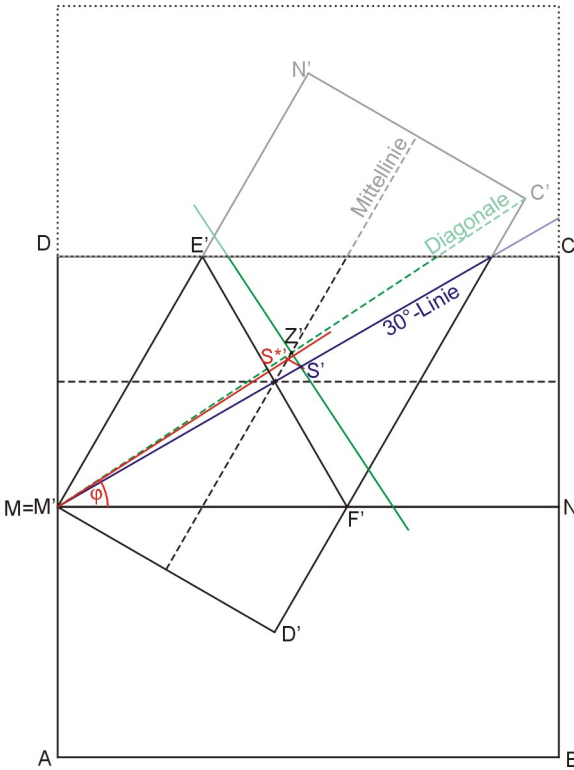


Abbildung 6:

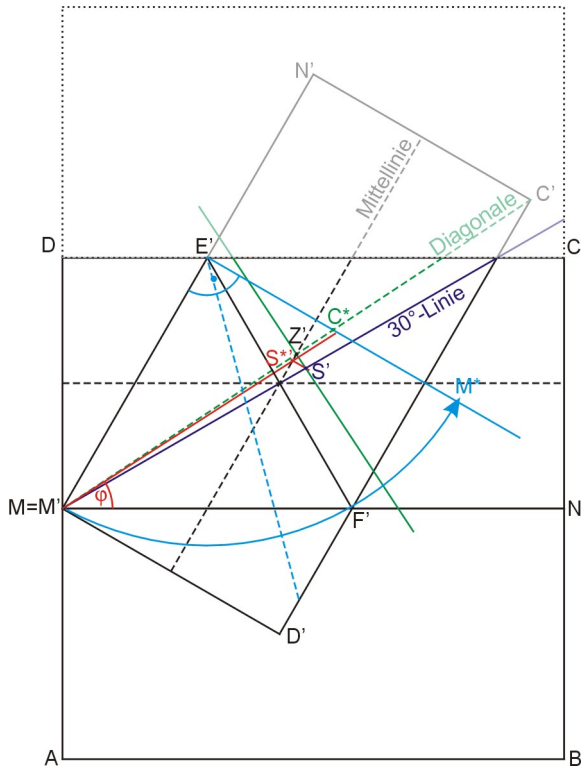


Abbildung 7:

Weil C' nicht zugänglich ist, müssen wir uns einen anderen Weg zur Bestimmung der Diagonalen überlegen. Dazu bemerken wir, dass die Diagonale MC' die Hypotenuse in dem rechtwinkligen Dreieck $MC'N'$ mit dem Kathetenverhältnis 1 : 2 ist. Ein dazu ähnliches Dreieck können wir aber leicht finden (vgl. Abb. 7), indem wir in E' an ME' einen rechten Winkel konstruieren und auf dem freien Schenkel dieses rechten Winkels den Punkt M^* so bestimmen, dass $|ME'| = |E'M^*|$ ist. Dann halbieren wir $E'M^*$ und erhalten den Punkt C^* . C^* muss ein Punkt der Diagonalen sein, weil die Dreiecke MC^*E' und $MC'N'$ ähnlich zueinander sind und durch zentrische Streckung mit dem Streckzentrum M auseinander hervorgehen. Damit haben wir aber die gesuchte Diagonale bestimmt, ohne den Punkt C' zu benutzen. Diese Diagonale schneidet nun die Mittellinie im Mittelpunkt Z' des Rechtecks $MD'C'N'$. Durch Z' errichten wir die Senkrechte auf der eben bestimmten Diagonale. Diese Senkrechte ist aber die Mittelsenkrechte dieser Diagonalen und schneidet die 30° -Linie im Punkt S' . Von S' wird nun nur noch das Lot auf die Mittellinie bestimmt und wir haben den gesuchten Punkt S^{*} bestimmt.

Damit hat aber der Winkel $\sphericalangle NMS^{*}$ die gewünschte Größe, die nur noch halbiert werden muss, um das gesuchte Modul zu falten.

In Abb. 8 wird der komplexe Faltvorgang, der auf den obigen Überlegungen beruht, für ein Modul des regelmäßigen 11-Ecks beschrieben.

Wir erkennen, dass es (theoretisch) möglich ist ein Modul zu falten, das dann das regelmäßige 11-Eck sehr gut annähert. Da die Faltung sehr komplex ist und viele Punkte sehr eng beieinander liegen,

schleichen sich natürlich Ungenauigkeiten ein. Daher ist es besser, wenn wir uns die Arbeit etwas vereinfachen und den Punkt K auf NC mit Hilfe eines Lineals in Abhängigkeit der Seitenlänge a unseres quadratischen Faltpapiers $ABCD$ bestimmen (vgl. Abb. 9).

Es muss dann $|NK| = a \cdot \tan 16,36^\circ \approx 0,29 \cdot a$ sein.

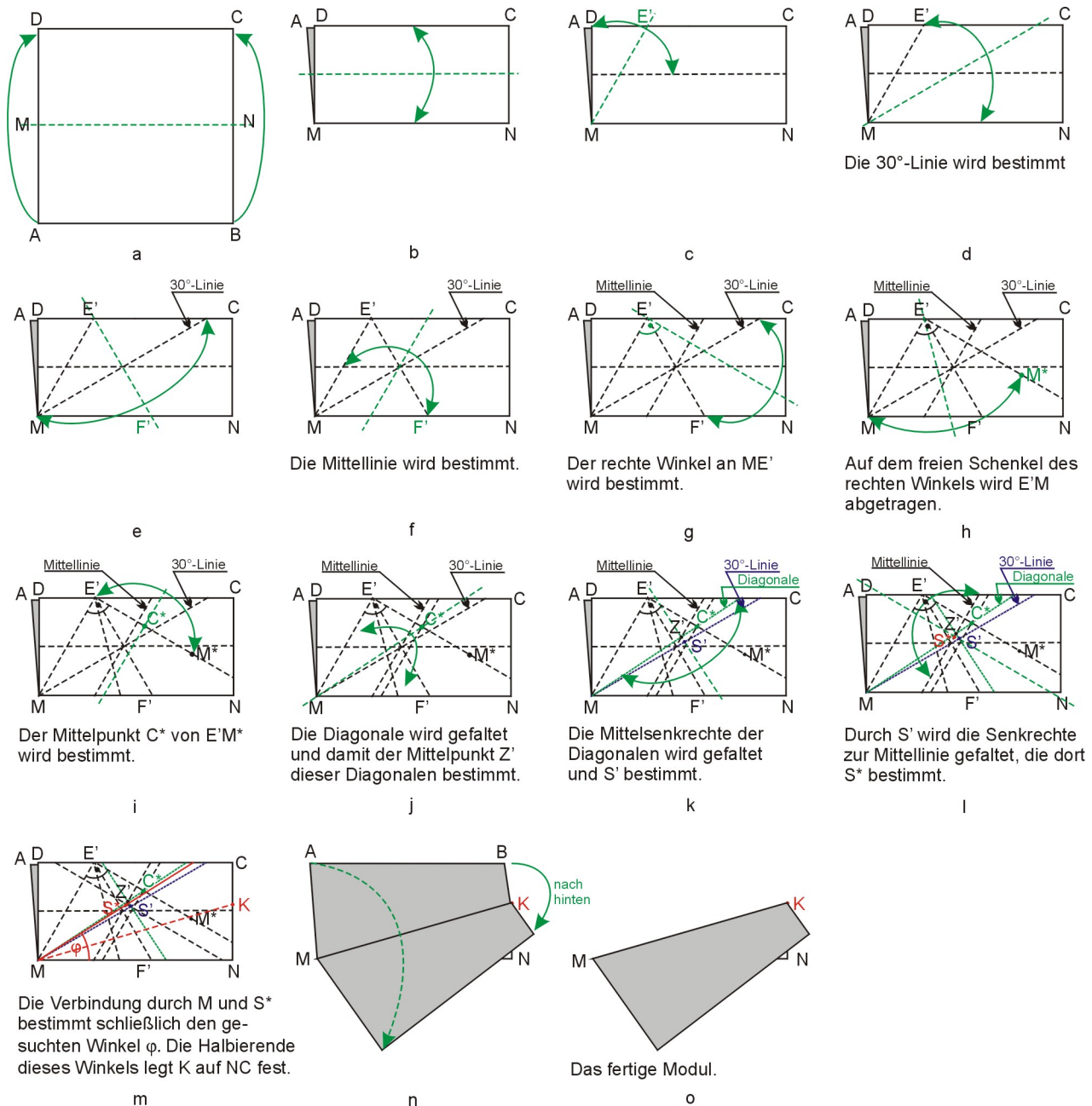


Abbildung 8: Faltfolge zum 11-Eck Modul

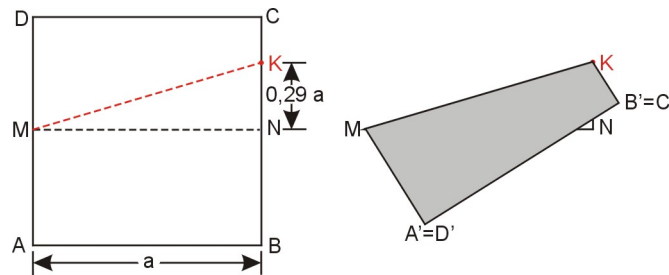


Abbildung 9: Technische Herstellung eines 11-Eck Moduls

Eine Näherungskonstruktion mit Zirkel und Lineal

Natürlich können wir die Überlegungen zum Falten des Moduls für das regelmäßige 11-Eck auch nutzen, um daraus eine gute Näherungskonstruktion mit Zirkel und Lineal für ein regelmäßiges 11-Eck zu gewinnen. Wir wollen ein regelmäßiges 11-Eck in einen Kreis mit gegebenem Radius einbeschreiben. Dazu betrachten wir einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r , so wie es in Abb. 10 zu sehen ist. LP_1 und OU sind zwei zueinander senkrechte Durchmesser dieses Kreises. In P_1 errichten wir auf LP_1 die Senkrechte und tragen darauf von P_1 aus den halben Radius ab. Q ist der zugehörige Punkt. Nun schneidet MQ den Kreis im Punkt C . Von C aus werden die Lote auf die beiden senkrechten Durchmesser gefällt. N und D sind die Lotfußpunkte, wie es in Abb. 10 zu sehen ist. $MNCD$ ist dann ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $2 : 1$. In diesem Rechteck führen wir die weitere Konstruktion, entsprechend der Faltvorschrift, aus. Dabei können wir aber etwas gestraffter vorgehen. Abb. 11 zeigt die Konstruktion in diesem Rechteck.

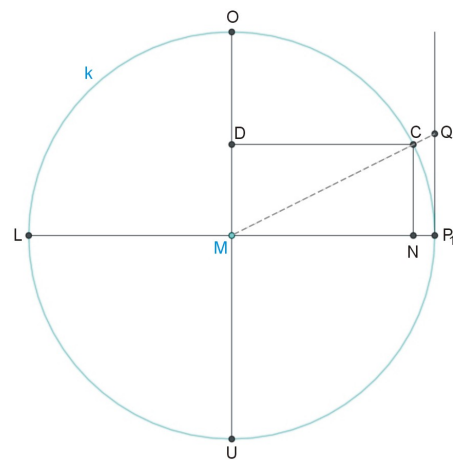


Abbildung 10:

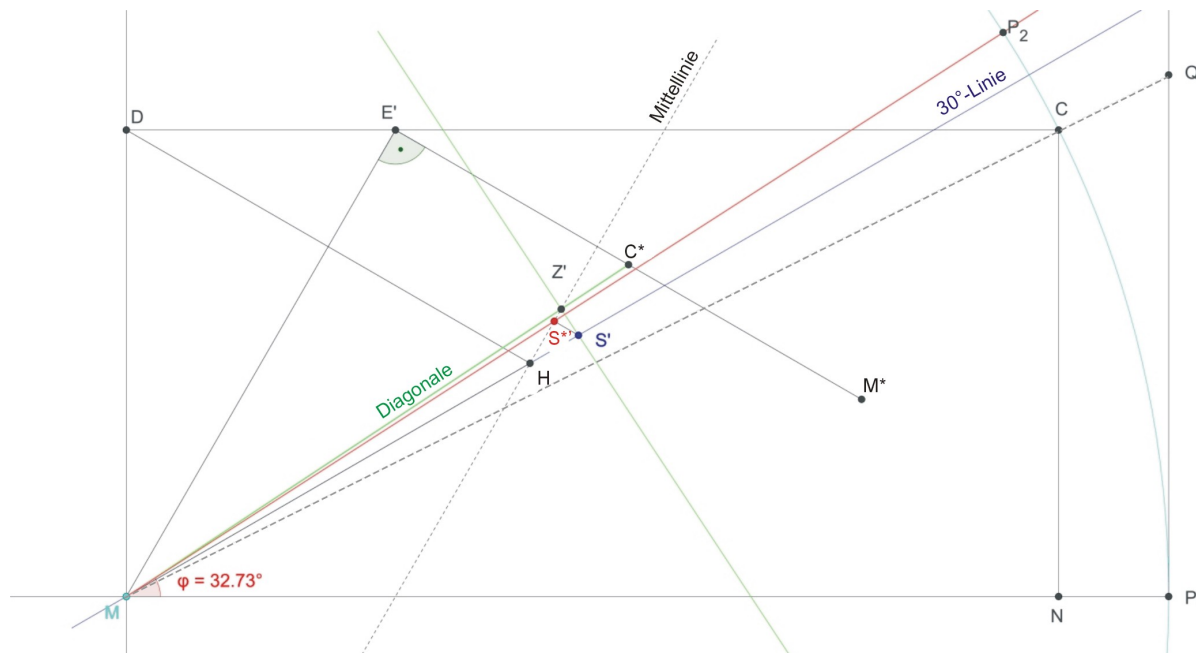


Abbildung 11:

Zuerst konstruieren wir über MD das regelmäßige Dreieck MDH so, dass H im Innern des Rechtecks $MNCD$ liegt. Die Senkrechte auf DH in H ist die Mittellinie aus unserer Faltkonstruktion. Die Mittelsenkrechte auf DH schneidet CD in E' .

Nun konstruieren wir in E' auf ME' die Senkrechte. Auf dieser Senkrechten tragen wir von E' die Strecke $E'M$ ab, wobei der zugehörige M^* im Innern von $MNCD$ liegt. C^* ist der Mittelpunkt von DM^* . Die Gerade durch M und C^* ist die Diagonale aus unserer Faltkonstruktion, die die Mittellinie in Z' schneidet.

Die Senkrechte durch Z' zu dieser Diagonalen schneidet die 30° -Linie MH in S' .

Nun fallen wir noch das Lot von S' auf die Mittellinie. $S^{*'}$ ist der zugehörige Lotfußpunkt. Dann ist $\angle NMS^{*'}$ der angenäherte Zentriwinkel des regelmäßigen 11-Ecks.

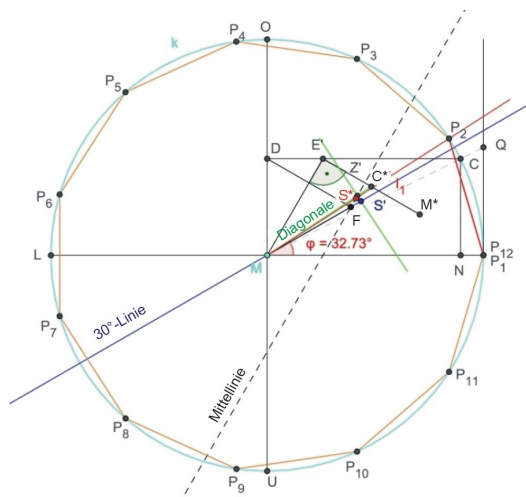


Abbildung 12:



Abbildung 13:

$MS^{*'}$ schneidet den Kreis k , in den wir das angenäherte regelmäßige 11-Eck konstruieren wollen, im Punkt P_2 . P_1P_2 ist eine Seite dieses einbeschriebenen 11-Ecks. Diese Strecke wird auf dem Kreis mehrfach abgetragen. Dabei entstehen die Eckpunkte $P_3, \dots, P_{12}$ (vgl. Abb. 12).

Auch die Konstruktion mit der dynamischen Geometriesoftware *Geogebra* zeigt, dass aufgrund der sehr guten Näherung des Winkels $\angle NMS^{*'}$ an den Zentriwinkel eines regelmäßigen 11-Ecks die Punkte P_1 und P_{12} fast zusammenfallen. Abb. 13 zeigt eine extreme Vergrößerung dieser Situation.

Der konstruierte Winkel mit der Größe $32,73^\circ$ weicht vom tatsächlichen Winkel mit der Größe $32,72^\circ$ um weniger als 0,09% ab. Dies macht sich auch in der Konstruktion bemerkbar, sodass man dort (vgl. Abb. 12) keinen Unterschied zwischen dem regelmäßigen 11-Eck und dem angenäherten 11-Eck wahrnimmt. Ebenso passen auch die gefalteten 11 Module sehr gut zusammen, wie wir in Abb. 14 sehen. Diese Module lassen sich allerdings untereinander nicht verbinden, sodass sie nur passend zusammengelegt werden können.



Abbildung 14: Das 11-Eck

Literatur

- [1] Gross, G. M.: *Minigami*. Gondrom, 2007.
- [2] Schmitz, M.: *Mathegami: Modulare Ringe mit 8, 7, 6, 4, 3 Ecken*. 2017.
- [3] Schmitz, M.: *Mathegami: Ein modularer Ring mit 5 Ecken*. 2017.
- [4] Schmitz, M.: *Mathegami: Modulare Ringe mit 9, 10, 12 Ecken*. 2017.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite www.mathegami.de findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).