

MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de

September 2017

Modulare Ringe mit 9, 10, 12 Ecken

Michael Schmitz

Die folgende Betrachtung setzt die Untersuchungen aus [2] und [3] fort. Ausgangspunkt war ein modularer achteckiger Sternenkranz (vgl. Abb. 1a) der in [1] beschrieben wurde. Das Modul entstand aus einem quadratischen Faltpapier, das parallel zu einer Kante halbiert wurde (vgl. Abb. 1b-d). Anschließend wurde D nach vorn und A nach hinten an der Faltlinie MK umgefaltet. Dabei wurde der Punkt K so bestimmt, dass der Winkel φ in S (vgl. Abb. 1d) die Größe des Innenwinkels eines regelmäßigen Achtecks hatte.

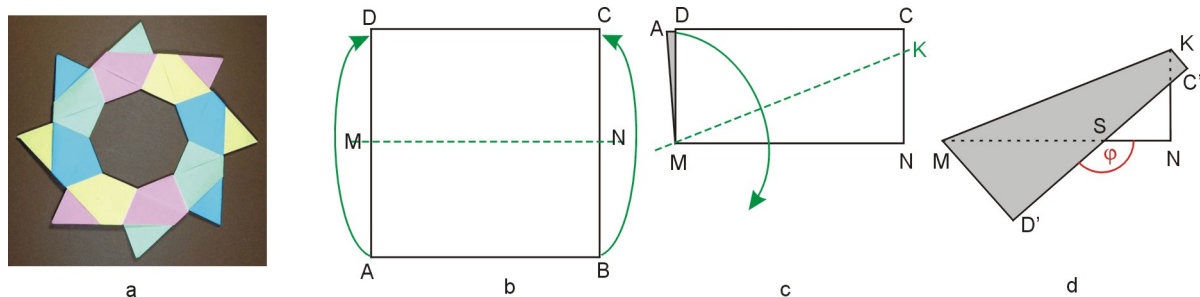


Abbildung 1: Der Sternenkranz und das Achteckmodul

Durch Veränderung des dort verwendeten Moduls entstanden neue Module für andere regelmäßige n -Ecke. Nun wollen wir Module für regelmäßige n -Eck-Ringe mit $n = 9, 10, 12$ entwickeln. Der Fall $n = 11$ bleibt einem eigenen *Mathegami* (vgl. [4]) vorbehalten.

1 Ein Neuneck

Für den Ring, der zu einem regelmäßigen Neuneck führt, wollen wir das Modul wieder analog aus einem quadratischen Papier falten. Dazu müssen wir den Punkt K (vgl. Abb. 1) so bestimmen, dass der Winkel φ bei S die Größe 140° hat. 140° entspricht der Größe des Innenwinkels eines regelmäßigen Neunecks (vgl. Abb. 2), denn es ist $\varphi_9 = 180^\circ - \alpha_9 = 180^\circ - \frac{360^\circ}{9} = 140^\circ$.

Nun überlegen wir uns die Größe des Winkels $\angle NMK$, damit wir K auf NC bestimmen können (vgl. Abb. 3). Dazu bedenken wir, dass $\varphi = 140^\circ$ ist, woraus $|\angle NSC'| = 40^\circ$ folgt.

Weil MK die Achse der Spiegelung ist, die D auf D' und C auf C' abbildet, gehen die drei Geraden, die durch D' und C' , durch M und K und durch D und C gehen, durch einen gemeinsamen Punkt K^* . Daher ist $|\angle C'K^*C| =$

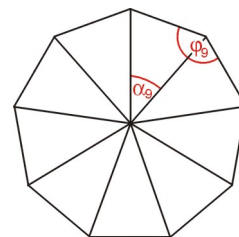


Abbildung 2: Regelmäßiges Neuneck

$|\angle NSC'| = 40^\circ$ (Winkel an geschnittenen Parallelen). Weil MK die Spiegelachse ist, ist MK auch die Winkelhalbierende von $\angle C'K^*C$. Folglich ist $|\angle KK^*C| = 20^\circ$. Damit hat auch der gesuchte Winkel $\angle NMK$ die Größe 20° (Winkel an geschnittenen Parallelen).

Nun wissen wir, wie wir das Modul für das regelmäßige Neuneck falten müssen. Wir müssen auf NC den Punkt K so bestimmen, dass der Winkel $\angle NMK$ die Größe 20° hat.

Jetzt denken wir noch daran, dass sich ein regelmäßiges Neuneck nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt. Daher kann man auch keinen Winkel mit der Größe 20° mit Zirkel und Lineal konstruieren. Andererseits ist aber 20° ein Drittel von 60° . Ein Winkel mit der Größe 60° lässt sich gut mit Zirkel und Lineal konstruieren und demzufolge auch gut durch Falten erzeugen. Die Teilung eines beliebigen Winkel in drei zueinander kongruente Teile ist mit Zirkel und Lineal natürlich auch nicht möglich. Allerdings ist sie mit zusätzlichen Hilfsmitteln, z.B., einem Einschiebelineal, zu bewerkstelligen. Der Prozess des Einpassens beim Einschiebelineal lässt sich auch beim Papierfalten nutzen, sodass wir einen beliebigen Winkel mit dem Falten von Papier dritteln können. Dies wird in [5] ausführlich beschrieben.

Nun können wir uns dem Falten des Neuneckmoduls zuwenden. Der Faltprozess ist in Abb. 4 dargestellt.

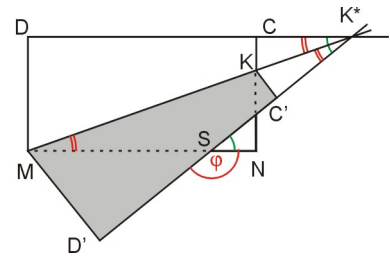


Abbildung 3: Regelmäßiges Achteck

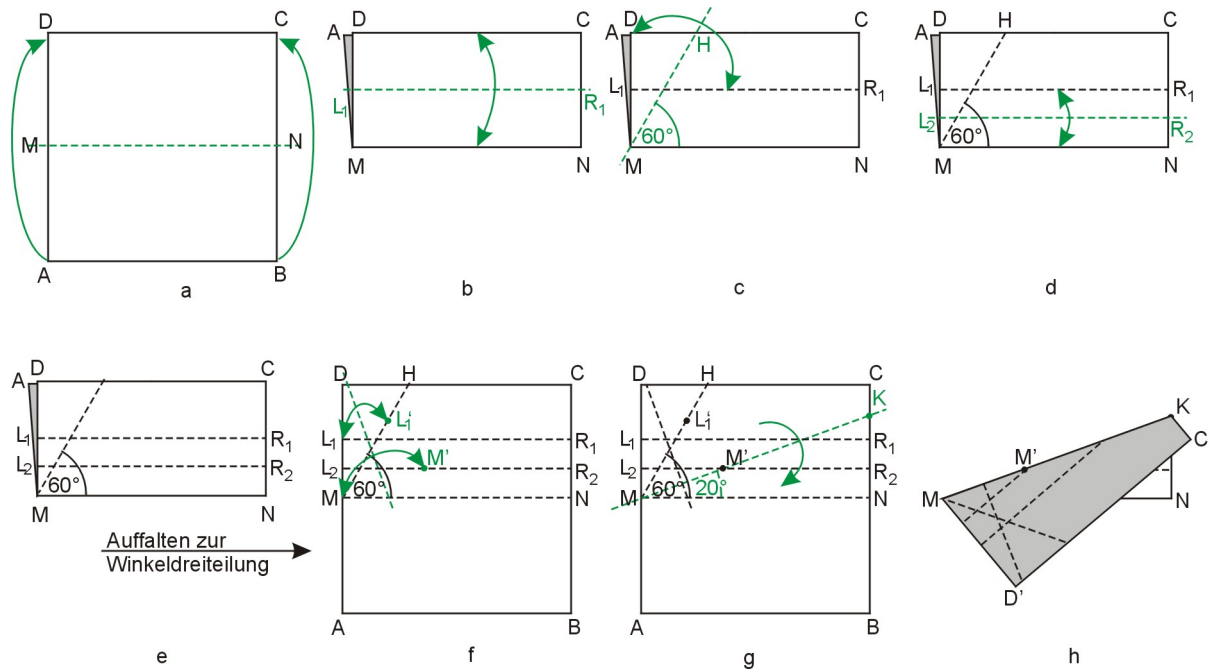


Abbildung 4: Falten des Neuneckmoduls

Die Halbierungslinien L_1R_1 , L_2R_2 und der freie Schenkel MH des 60° -Winkels werden nur im oben liegenden Rechteck $MNCD$ gefaltet (Abb. 4b-d). Die Drittelung des 60° -Winkels erfolgt in Abb. 4f. Dabei falten wir M so auf L_2R_2 , dass L_1 auf MH fällt. Dieses Einpassen der Strecke ML_1 zwischen die Strecken L_2R_2 und MH ist mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar. Mit dem Falten von Papier kann man dies aber sehr gut realisieren. $\angle NMM'$ ist der gesuchte Winkel mit der Größe 20° . Die Faltlinie durch M und M' schneidet NC im Punkt K . Abb. 4h zeigt das fertige Modul.

In Abb. 5a-c ist das Zusammensetzen von zwei dieser Module gezeigt. Dabei wird wieder das erste mit dem zweiten Modul verbunden, indem wir die überstehenden Ecken des ersten Moduls in das zweite Modul hineinfalten. Abb. 5d zeigt den fertigen Neuneckring, in dessen Inneren das regelmäßige Neuneck zu sehen ist.

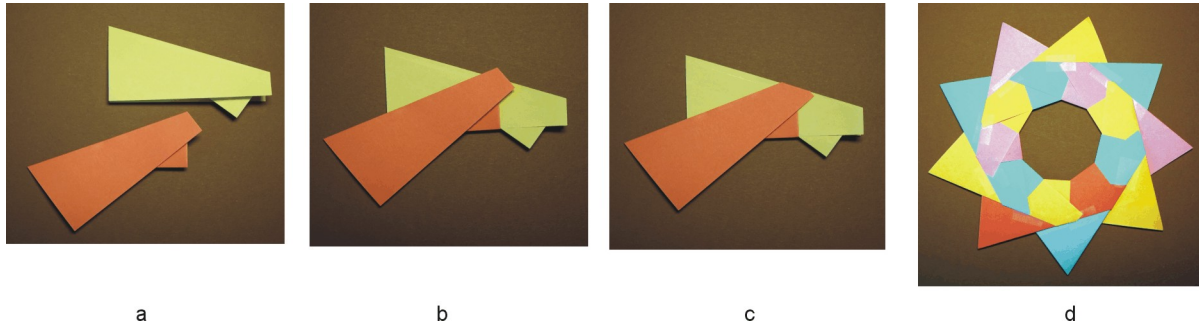


Abbildung 5: Zusammensetzung und fertiger Neuneckring

2 Ein Zehneck

Weil der Zentriwinkel α_{10} im regelmäßigen Zehneck eine Größe von 36° hat, beträgt die Größe des Innenwinkels φ_{10} des regelmäßigen Zehnecks 144° (vgl. Abb. 6a). Daraus leitet sich auch, wie beim Neuneck, die Faltplanung für das Zehneckmodul ab (vgl. Abb. 6b). In Analogie folgt aus der Größe 144° des Winkels φ , dass $|\angle NMK| = 18^\circ$ sein muss.

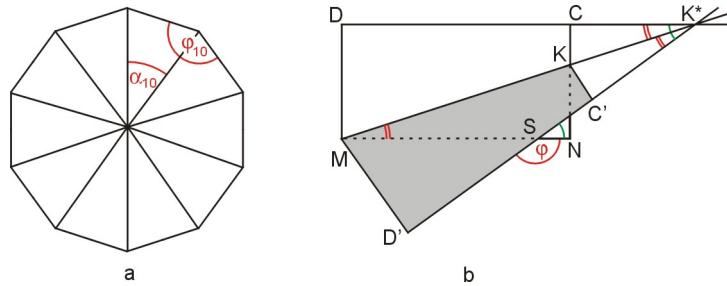


Abbildung 6: Regelmäßiges Zehneck und Zehneckmodul

Wir müssen also an MN einen Winkel der Größe 18° falten, um den Punkt K auf NC zu bestimmen. Falten wir dann an MK , so entsteht unser Zehneckmodul.

Für das Falten eines Winkels der Größe 18° können wir auf das Falten des Fünfecksmoduls zurückgreifen (vgl. [3]). Dort wurde ein Winkel mit der Größe 36° gefaltet, der nun nur noch zu halbieren ist. Abb. 7 und Abb. 8 zeigen die zugehörige Faltfolge und Abb. 8k den fertigen Zehneckring.

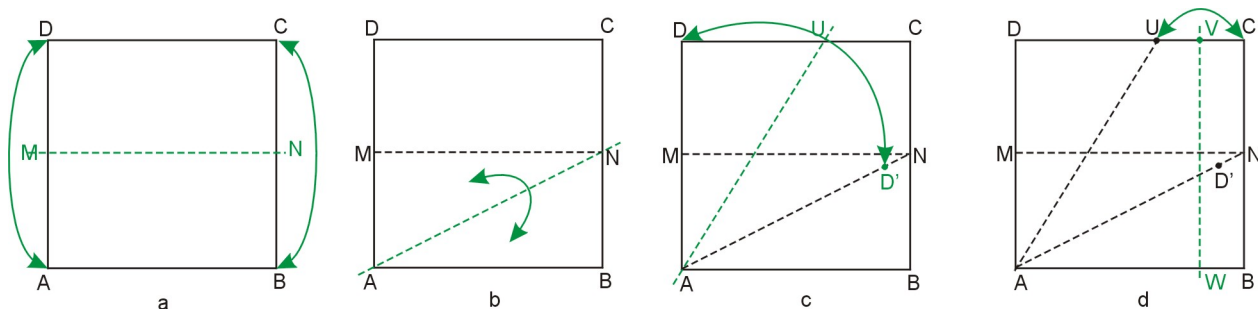


Abbildung 7: Faltfolge für das Zehneckmodul (Teil 1)

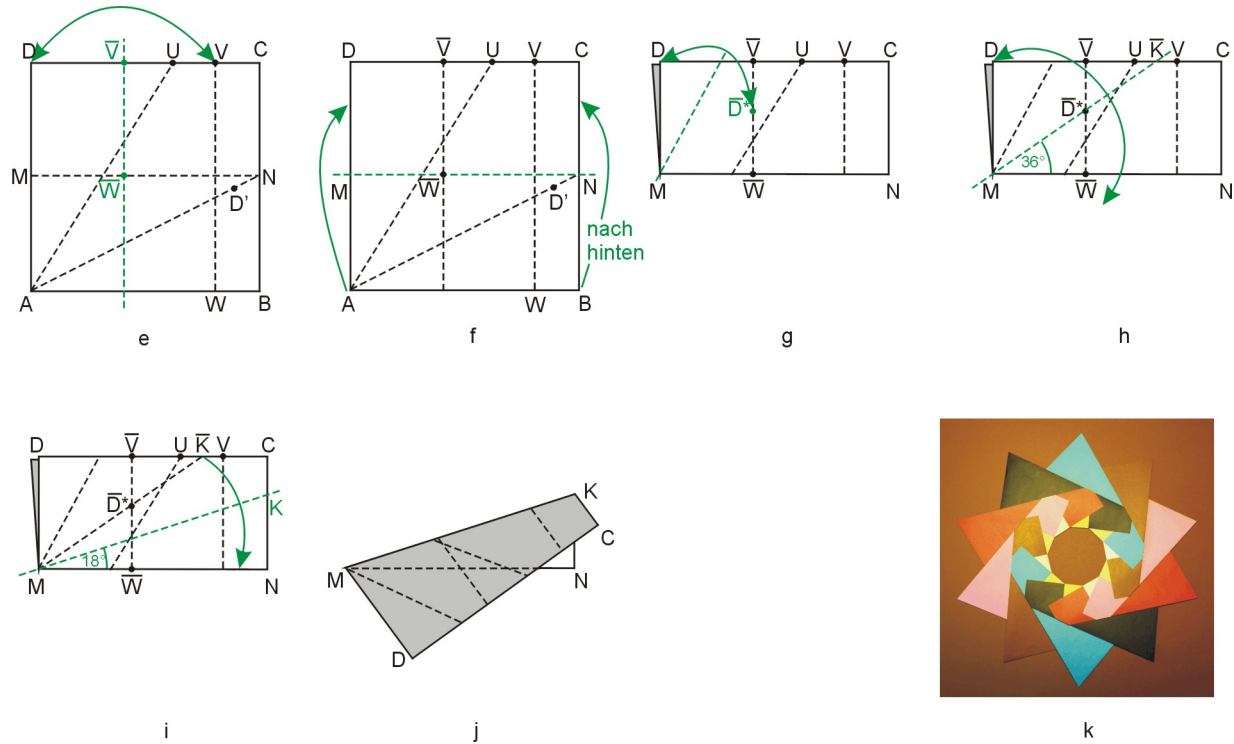


Abbildung 8: Fortsetzung von Abb.7 - Faltfolge für das Zehneckmodul und fertiger Zehneckring

3 Ein Zwölfeck

Weil der Zentriwinkel α_{12} im regelmäßigen Zwölfeck eine Größe von 30° hat, beträgt die Größe des Innenwinkels φ_{12} des regelmäßigen Zehnecks 150° (vgl. Abb. 9a). Daraus leitet sich auch, wie beim Neun- bzw. Zehneck, die Faltplanung für das Zwölfeckmodul ab (vgl. Abb. 9b). In Analogie folgt aus der Größe 150° des Winkels φ , dass $|\angle NMK| = 15^\circ$ sein muss.

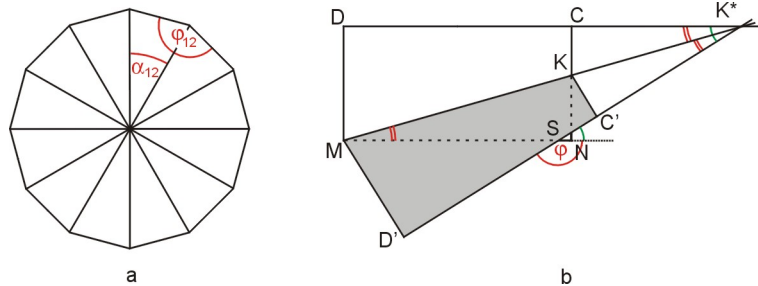


Abbildung 9: Regelmäßiges Zwölfeck und Zwölfeckmodul

Wir müssen also an MN einen Winkel der Größe 15° falten, um den Punkt K auf NC zu bestimmen. Falten wir dann an MK , so entsteht unser Zwölfeckmodul. Damit können wir die Faltfolge für das Zwölfeckmodul von der des Sechseckmoduls (vgl. [2]) übernehmen und nur noch die Winkelhalbierende des 30° -Winkels zusätzlich falten. Diese Faltfolge ist in Abb. 10a-e dargestellt.

Führen wir diese Faltung mit einem quadratischen Ausgangsfaltpapier durch, so können wir feststellen, dass nach dem Umfalten die Quadratseite CD durch den Punkt N geht. Um dies genauer zu untersuchen, ob dies tatsächlich so ist, betrachten wir Abb. 10d noch einmal und zeichnen dort das Lot von H_2 auf MN ein, wie es in Abb. 10f dargestellt ist. H_2^* bezeichnet den Lotfußpunkt auf MN . Dort haben wir zusätzlich das Dreieck $MH_2^*H_2$ an MN gespiegelt. Weil $|MH_2^*| = |MH_2|$ und $|\angle H_2^*MH_2| = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ sind, ist das Dreieck $MH_2^*H_2$ gleichseitig. Es gilt also $|MH_2^*| = |MH_2| = |H_2^*H_2|$. Da $|H_2^*H_2|$ gerade der Seitenlänge des Ausgangsquadrates entspricht, ist $|MH_2| = |MN|$ und beim

Falten an MK (vgl. Abb. 10e) geht $D'C'$ tatsächlich durch N . Damit fällt auch N mit S zusammen.

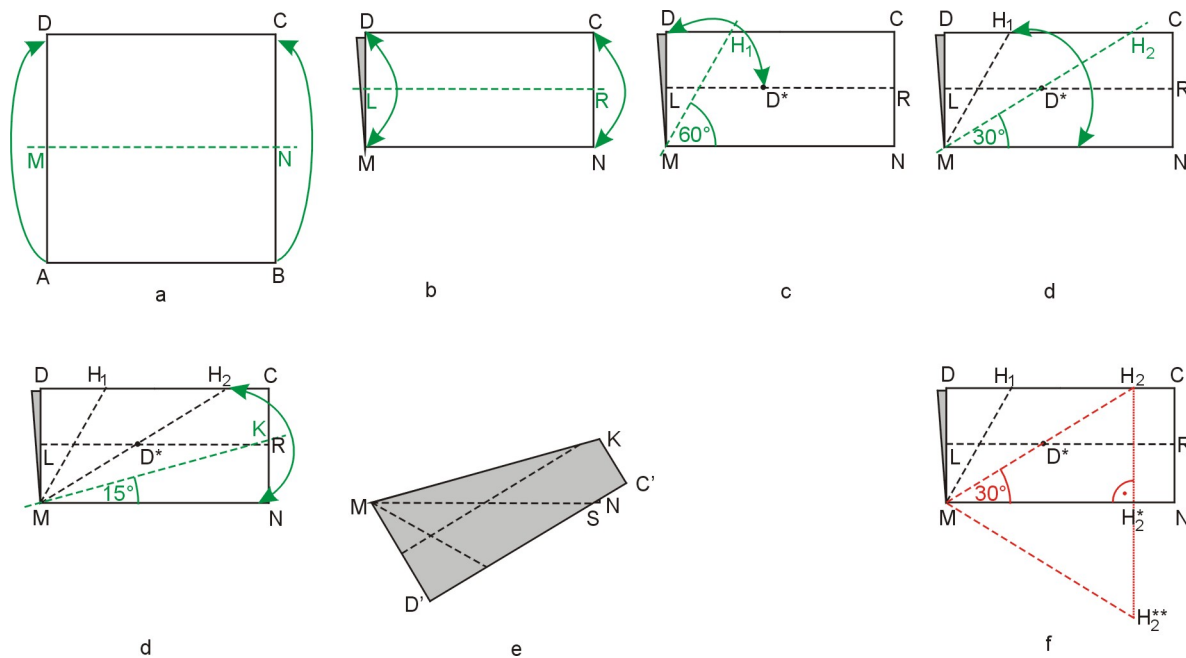


Abbildung 10: Faltfolge für das Zwölfeckmodul

Nach diesen Überlegungen ergibt sich auch eine vereinfachte Faltfolge für das Zwölfeckmodul. Wir müssen nämlich nach dem Halbieren des quadratischen Faltpapiers nur noch die Ecke N so auf CD falten, dass die Faltlinie durch M geht. Schon ist unser Modul fertig. Die zugehörige Faltfolge ist in Abb. 11 zu sehen.

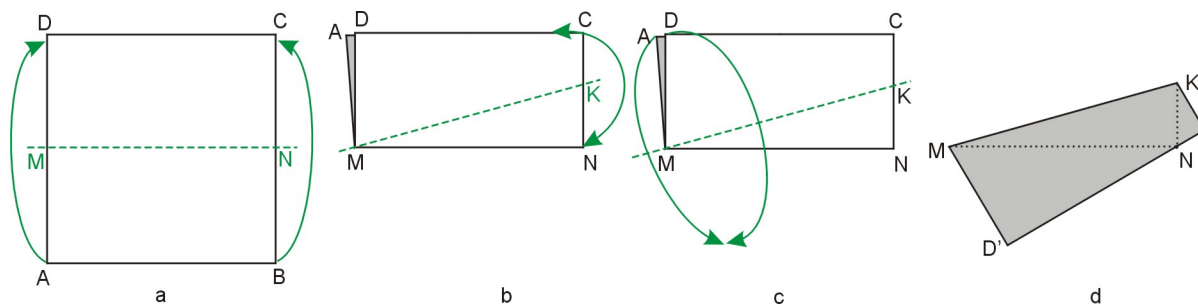


Abbildung 11: Neue Faltfolge für das Zwölfeckmodul

Zwölf dieser Module werden wie üblich ineinander geschoben. Dabei entsteht im Innern kein regelmäßiges Zwölfeck, da alle Module sich um den Punkt N anordnen. Abb. 12 zeigt den fertigen Zwölfeckring.

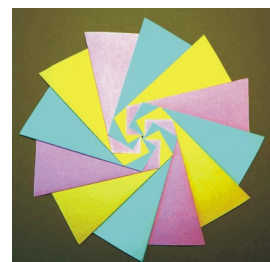


Abbildung 12: Zwölfeckring

Literatur

- [1] Gross, G. M.: *Minigami*. Gondrom, 2007.
- [2] Schmitz, M.: *Mathegami: Modulare Ringe mit 8, 7, 6, 4, 3 Ecken*. 2017.
- [3] Schmitz, M.: *Mathegami: Ein modularer Ring mit 5 Ecken*. 2017.
- [4] Schmitz, M.: *Mathegami: Ein modularer Ring mit 11 Ecken*. 2017.
- [5] Schmitz, M.: *Mathegami: Winkeldreiteilung*. 2015.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite www.mathegami.de findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).