

MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

Ein modularer Ring mit 5 Ecken

Michael Schmitz

In diesem Beitrag setzen wir die Betrachtungen aus [3] fort und falten ein Modul, das sich für einen fünfeckigen Ring eignet. Dieser Ring ist in Abb. 1 zu sehen. Unser Modul entsteht aus einem Quadrat $ABCD$, das parallel zu AB halbiert wird. $MNCD$ ist das oben liegende Rechteck. Anschließend wird die Ecke D an einer Faltkante durch M umgefaltet. Diese Faltkante schneidet CD in K , und D' ist der Bildpunkt von D . Weil der Ring im Inneren ein regelmäßiges Fünfeck bilden soll, muss das Modul, das in Abb. 2a zu sehen ist, so gestaltet sein, dass der Winkel bei S eine Größe von 108° hat und damit der Größe eines Innenwinkels im regelmäßigen Fünfeck entspricht. Wenn wir diese Faltung gefunden haben, dann lassen sich fünf solche Module zu dem in Abb. 1 gezeigten Ring zusammensetzen.

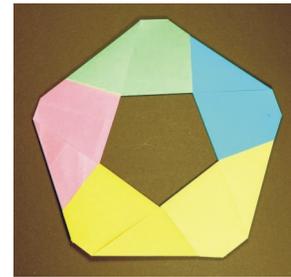


Abbildung 1:

Wir nehmen zuerst an, dass wir die gewünschte Faltung gefunden haben und untersuchen die dadurch entstandene Figur (Abb. 2b). Weil $|\sphericalangle NSD'| = 108^\circ$ ist, muss $|\sphericalangle KSN| = 72^\circ$ sein. Folglich muss auch $|\sphericalangle SKD| = 72^\circ$ sein (Winkel an geschnittenen Parallelen). Weil KM die Winkelhalbierende dieses Winkels ist, ist $|\sphericalangle MKD| = 36^\circ$ und damit auch $|\sphericalangle KMN| = 36^\circ$ (Winkel an geschnittenen Parallelen). Dies bedeutet aber, dass wir im Rechteck $MNCD$ in M an MN einen Winkel der Größe 36° falten müssen, um den Punkt K auf CD und damit die gesuchte Faltlinie zu bestimmen.

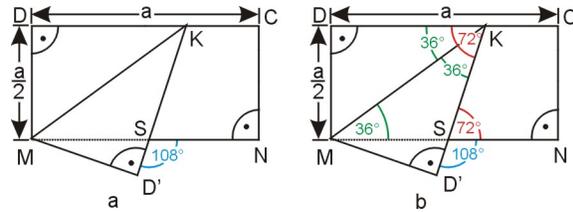


Abbildung 2:

1 Einen Winkel mit der Größe 36° falten

Wir zeigen, wie wir einen Winkel mit der Größe 36° in einer Ecke des quadratischen Faltpapiers falten.

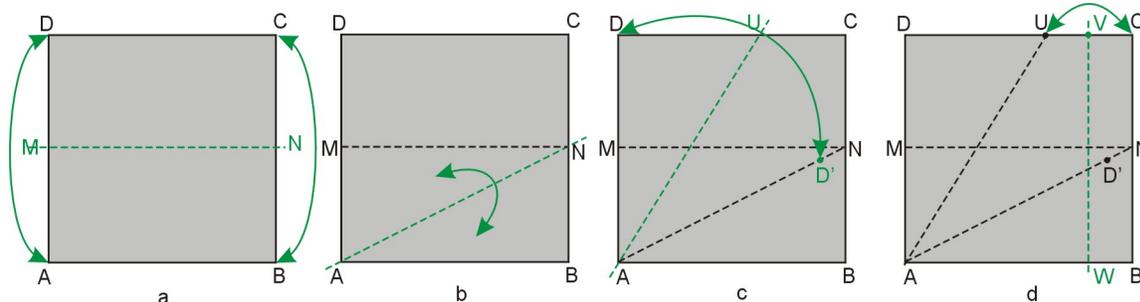


Abbildung 3: Der Faltprozess

Dazu halbieren wir das quadratische Faltpapier $ABCD$ parallel zu AB . M und N sind die entsprechenden Mittelpunkte auf AD und BC (Abb. 3a). Anschließend falten wir die Diagonale AN in das Rechteck $ABNM$ (Abb. 3b). Als nächstes falten wir D so auf die Diagonale AN , dass die Faltnisse durch A geht (Abb. 3c). D' ist der Bildpunkt von D auf AN und U der Schnittpunkt der Faltnisse mit CD ¹. Schließlich falten wir C auf U , wodurch die Mittelsenkrechte zu UC entsteht (Abb. 3d). Diese Mittelsenkrechte schneidet CD in V und AB in W .

Den Abschluss und damit das Falten eines Winkels mit der Größe 36° bringt das Falten von D auf WV , sodass die Faltnisse durch A geht (Abb. 4). D^* bezeichnet den Bildpunkt von D auf WV und T der Schnittpunkt der zugehörigen Faltnisse mit CD .

Nun ist $|\sphericalangle BAD^*| = 36^\circ$. Dies ist natürlich eine Behauptung, die im Folgenden erst bewiesen werden muss. Dazu werden wir die Größe dieses Winkels entsprechend des Faltprozesses berechnen.

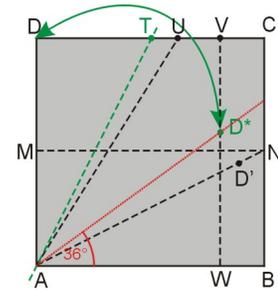


Abbildung 4:

2 Berechnung von $|\sphericalangle BAD^*|$

Damit wir die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD^*$, den wir im vorhergehenden Abschnitt gefaltet haben, berechnen können, ist eine Vorbetrachtung notwendig. Dazu müssen wir die Werte der Winkelfunktionen (\sin , \cos und \tan) für einen Winkel mit der Größe 36° bestimmen.

2.1 Bestimmung von $\sin 36^\circ$, $\cos 36^\circ$ und $\tan 36^\circ$

Wir betrachten ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit $|AC| = |BC|$ und $|\sphericalangle BCA| = 36^\circ$ (Abb. 5). Dann haben die anderen beiden Innenwinkel des Dreiecks jeweils die Größe 72° . Wir zeichnen die Winkelhalbierenden dieser beiden Winkel ein, die AC in D und BC in E schneiden.

Weil $|\sphericalangle EAB| = 36^\circ$ ist, ist $|\sphericalangle BEA| = 72^\circ$. Folglich ist das Dreieck ABE gleichschenkelig, und es ist $|AB| = |AE|$. Analog folgt, dass auch das Dreieck ABD gleichschenkelig mit $|AB| = |DB|$ ist.

Da $|\sphericalangle CAE| = 36^\circ$ ist, ist auch das Dreieck AEC gleichschenkelig mit $|AE| = |EC|$. Analog ergibt sich $|BD| = |DC|$.

In dem Ausgangsdreieck ABC gilt also insgesamt: $|AB| = |AE| = |BD| = |DC| = |EC|$.

Damit sind aber im Besonderen die Dreiecke DAB und ABC ähnlich zueinander und es gilt $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Weil $|AB| = |DC|$ ist, folgt $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|DC|}{|AC|}$. Aus dieser Beziehung lesen wir sofort ab, dass D die Strecke AC im *goldenen Schnitt* teilt.

Haben DC und AC die Längen a und l , so gilt $\frac{l-a}{a} = \frac{a}{l}$, woraus $l(l-a) = a^2$ bzw. $l^2 - al - a^2 = 0$ folgt. Dies fassen wir als quadratische Gleichung für l auf und erhalten die beiden Lösungen $l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ und $l_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}a$. Weil $l_2 < 0$ ist, kommt diese Lösung für uns hier nicht in Frage. Wir erhalten also $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a$, woraus $\frac{l}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ bzw. $\frac{a}{l} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ folgt.

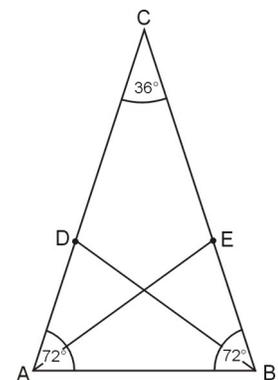


Abbildung 5:

¹ U teilt CD im goldenen Schnitt. Diese Konstruktion wird in [1] zum Falten eines goldenen Rechtecks beschrieben. Wie man in [2] lesen kann, war diese Faltung bereits dem deutschen Mathematiker ALFRED HURWITZ (1859 - 1919) bekannt. Darauf aufbauend faltete und konstruierte er ein regelmäßiges Fünfeck.

Damit gelten in unserem Dreieck ABC die Verhältnisse $\frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ bzw. $\frac{|DC|}{|AC|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Weil in diesem Dreieck auch der Sinussatz gilt, ist $\frac{|AC|}{\sin 72^\circ} = \frac{|AB|}{\sin 36^\circ}$ und wegen $|AB| = |DC|$ folgt $\frac{|AC|}{\sin 72^\circ} = \frac{|DC|}{\sin 36^\circ}$.

Nun müssen wir ein Additionstheorem anwenden. Es gilt $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, womit $\frac{|AC|}{2 \cdot \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ} = \frac{|DC|}{\sin 36^\circ}$ folgt. Daraus ergibt sich $\cos 36^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{|AC|}{|DC|} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Mit dem trigonometrischen Pythagoras erhalten wir weiter, dass $\sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \dots = \frac{1}{4} \sqrt{2(5 - \sqrt{5})}$ ist.

Und weiter ist $\tan 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \dots = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Wir haben damit $\sin 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{2(5 - \sqrt{5})}$, $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ und $\tan 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$ berechnet.

2.2 Beweis für $|\sphericalangle BAD^*| = 36^\circ$

Um die Größe des Winkels $\sphericalangle BAD^*$ (vgl. Abb. 4) zu berechnen gehen wir von einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ mit der Kantenlänge $a = 1$ aus. Wir legen die Faltkonstruktion außerdem in ein Koordinatensystem, wie es in Abb. 6 gezeigt ist. Die Größe des gesuchten Winkels bezeichnen wir mit φ .

Zuerst berechnen wir die Koordinaten $x_{D'}$ und $y_{D'}$ von D' . Weil $|AD| = |AD'| = 1$ ist, gilt $x_{D'}^2 + y_{D'}^2 = 1$, wobei $y_{D'} = \frac{1}{2}x_{D'}$ ist. Damit erhalten wir $x_{D'} = \frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Der Anstieg der Geraden durch D und D' ist $m_{DD'} = -\frac{1-y_{D'}}{x_{D'}}$, also $m_{DD'} = -\frac{1-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{2}{5}\sqrt{5}} = \dots = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Weil die Faltlinie AU senkrecht zu DD' ist, gilt für deren Anstieg $m_{AU} = -\frac{1}{m_{DD'}} = \dots = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Damit ist $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ die Gleichung der Geraden durch A und U .

Da die y -Koordinate von U gleich 1 ist, gilt für die x -Koordinate $1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x_U$. Daraus folgt $x_U = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Weil V der Mittelpunkt von UC ist, gilt $x_V = \frac{1+x_U}{2} = \dots = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Jetzt können wir die Koordinaten von D^* berechnen. Da $|AD^*| = 1$ ist, gilt $x_{D^*}^2 + y_{D^*}^2 = 1$, wobei $x_{D^*} = x_V$ ist. Daraus erhalten wir $y_{D^*} = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Mit der x - und y -Koordinate von D^* können wir nun endlich $\tan \varphi$ berechnen. Es gilt $\tan \varphi = \frac{y_{D^*}}{x_{D^*}} = \dots = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Dieser Wert stimmt aber mit dem oben berechneten Wert von $\tan 36^\circ$ überein, woraus wir schlussfolgern können, dass $\varphi = 36^\circ$ ist. Damit ist aber der Beweis für die Richtigkeit der Faltkonstruktion für einen Winkel der Größe 36° erbracht.

Zur Vollständigkeit berechnen wir noch die x -Koordinaten von T und K .

Da AT senkrecht zu DD^* ist, ist der Anstieg der Geraden durch A und T gleich $m_{AT} = -\frac{1}{m_{DD^*}}$. Es ist $m_{DD^*} = -\frac{1-y_{D^*}}{x_{D^*}} = \dots = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5} + 1$, woraus $m_{AT} = \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{5 - 2\sqrt{5}} - 1}$ folgt. Mit Hilfe der

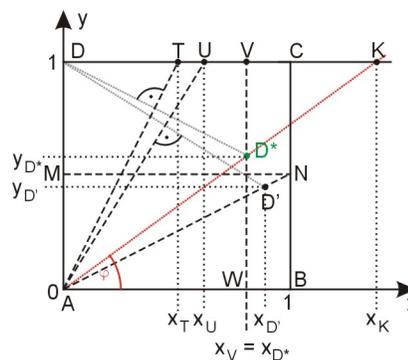


Abbildung 6:

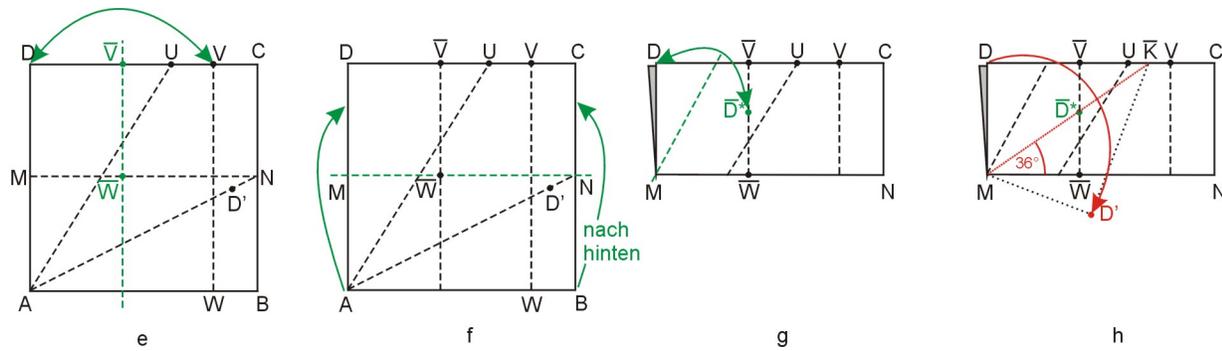


Abbildung 8: Der Faltprozess

Das fertige Modul zeigt Abb. 9.

Fünf dieser Module lassen sich zu einem fünfeckigen Ring zusammenstecke, der im Innern ein regelmäßiges Fünfeck bildet. Aus theoretischer Sicht ist dieses Fünfeck ‘exakt’ und nicht nur ein angenähertes regelmäßiges Fünfeck.

Schließlich zeigt Abb. 10 den Zusammenbau von zwei Modulen.

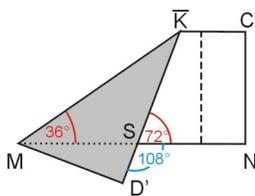


Abbildung 9:

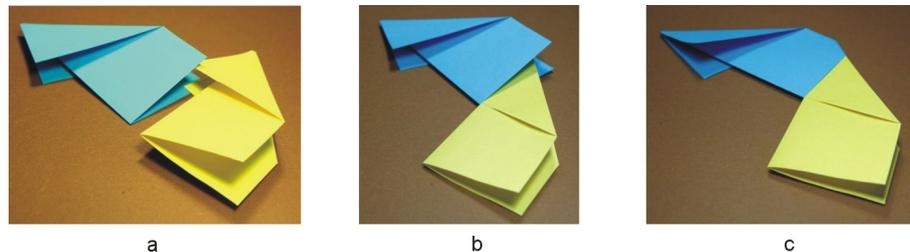


Abbildung 10: Der Zusammenbau

Auch der äußere Rand des Fünfeckringes bildet ein regelmäßiges Fünfeck, wenn die Kanten des Ringes verlängert werden. Dies folgt wieder daraus, dass ein Folgemodul aus dem vorhergehenden Modul durch eine Drehung um S mit dem Drehwinkel 72° und einer anschließenden Verschiebung, die S auf N abbildet, entsteht (Abb. 11). Daher schließen die Gerade durch M und \bar{K} und die zugehörige Bildgerade ebenfalls einen Winkel der Größe 72° und damit auch einen Winkel der Größe 108° ein. Da auch die äußeren Kanten die selbe Länge haben, ist der äußere Rand des Fünfeckringes ebenfalls ein regelmäßiges Fünfeck (, wenn man die Kanten des Ringes verlängert).

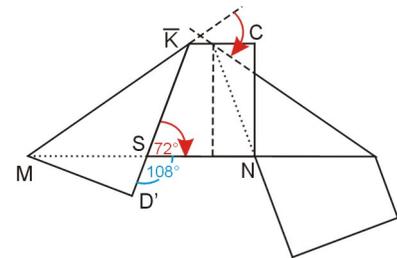


Abbildung 11:

4 Eine Näherungskonstruktion

Wir erinnern uns, dass wir im Abschnitt 2.2 die Koordinaten verschiedener Punkte berechnet haben, die bei unserer Faltkonstruktion für einen Winkel der Größe 36° von Bedeutung sind (siehe Abb. 6). Von besonderer Bedeutung ist der Punkt T . Wird nämlich der Punkt D an AT umgefaltet, dann entsteht der Punkt D^* mit der Eigenschaft, dass $|\sphericalangle D^*AB| = 36^\circ$ ist. Zur Bestimmung von T sind mehrere Faltschritte notwendig.

Nun haben wir in Abschnitt 2.2 auch die x -Koordinaten von T bestimmt: $x_T \approx 0,5095$. Damit ist T

fast der Mittelpunkt von DC . Wir können also den Punkt T durch den Mittelpunkt von DC ersetzen und erhalten dadurch eine gute Näherung für einen Winkel mit der Größe 36° . Dies verwenden wir nun bei der Faltung eines Näherungsmoduls. Die Faltfolge ist der Abb. 12 zu entnehmen.

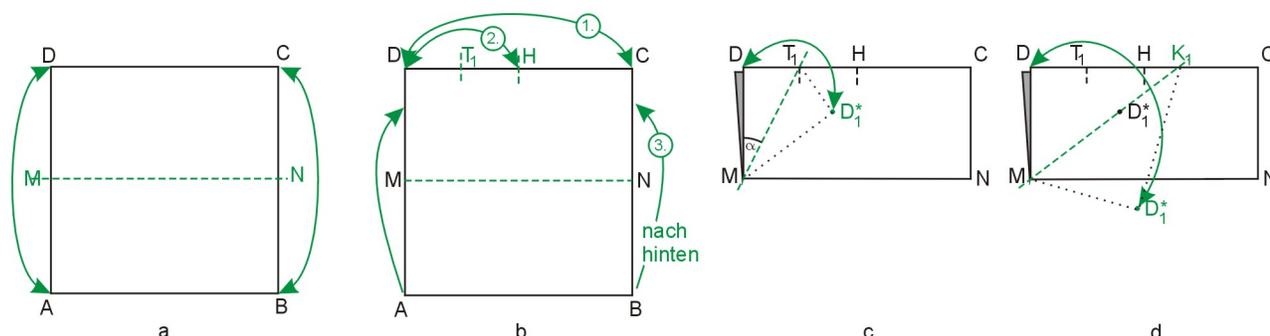


Abbildung 12: Das Näherungsmodul

Nachdem wir D an MK_1 umgefaltet (Abb. 12d) und die hintere Schicht deckungsgleich zur vorderen nach hinten gefaltet haben, entsteht das fertige Näherungsmodul (Abb. 13).

Als nächstes berechnen wir den Winkel φ (Abb. 13). Dazu bezeichnen wir die Größe des Winkels $\sphericalangle DMT_1$ mit α (Abb. 12c). Damit ist $|\sphericalangle DMD_1^*| = 2\alpha$ und folglich $|\sphericalangle K_1MN| = 90^\circ - 2\alpha$. Weiterhin gilt $|\sphericalangle DK_1M| = |\sphericalangle MK_1D_1^*| = 90^\circ - 2\alpha$ (Winkel an geschnittenen Parallelen und Spiegelung an MK_1). Folglich ist $|\sphericalangle K_1SM| = 4\alpha$ (Abb. 13) und damit $\varphi = 4\alpha$.

Die Winkelgröße α bestimmen wir im Dreieck MT_1D (Abb. 12c). Dort gilt, wenn die Kantenlänge des Ausgangsquadrates den Wert 1 hat, $\tan \alpha = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, woraus $\alpha \approx 26,565^\circ$ und damit $\varphi \approx 106,260^\circ$ folgt.

Die Abweichung dieses Wertes von der Größe eines Innenwinkels im regelmäßigen Fünfeck (108°) ist hier etwa genau so groß wie bei dem sieben-eckigen Ring aus [3]. Trotzdem lässt sich aus fünf solchen Näherungsmodulen ein fünfeckiger Ring zusammensetzen, bei dem das innere Fünfeck sehr regelmäßig aussieht.

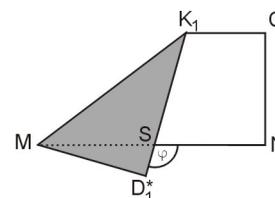


Abbildung 13:

5 Ein regelmäßiges Fünfeck

Im Folgenden wollen wir uns damit befassen, ein regelmäßiges Fünfeck in ein quadratisches Faltpapier zu falten. Auch eine Näherungslösung wird es dazu geben, ebenso eine Übertragung der Faltkonstruktion auf eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal, um in einen gegebenen Kreis ein regelmäßiges Fünfeck einzubeschreiben.

5.1 Faltkonstruktion für ein regelmäßiges Fünfeck

Die Konstruktion zum Falten eines Winkels mit der Größe 36° aus Abschnitt 1 können wir auch in den Mittelpunkt O des Quadrates $ABCD$ übertragen (Abb. 14). Dazu falten wir die Mittellinie parallel zu AD in des Faltpapier und erhalten die Seitenmittelpunkte G auf AB und H auf

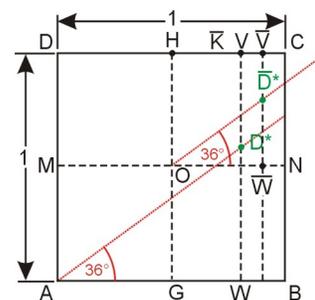


Abbildung 14:

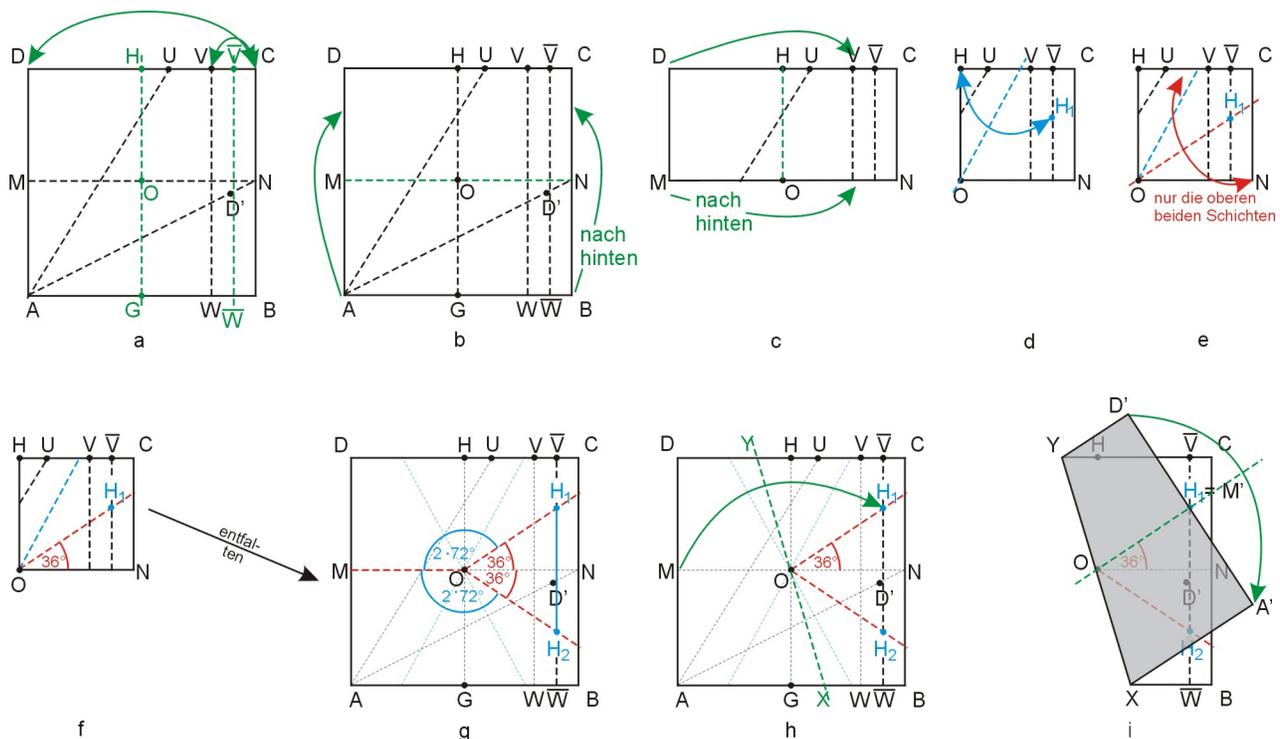
CD . O ist dann der Schnittpunkt von MN mit GH und damit der Mittelpunkt des Quadrates. In das Ausgangsquadrat haben wir bereits nach Abb. 3 und 4 einen Winkel der Größe 36° gefaltet. Nun benutzen wir die zentrische Streckung mit dem Zentrum C und dem Streckfaktor $\frac{1}{2}$. Dadurch wird das Quadrat $ABCD$ auf das Teilquadrat $ONCH$ abgebildet und der 36° -Winkel in A geht in einen 36° -Winkel in O über. Dabei geht D^* in \bar{D}^* und V in \bar{V} über. Weil der Streckfaktor gleich $\frac{1}{2}$ ist, ist \bar{V} der Mittelpunkt von CV . Der Punkt \bar{D}^* , der zur Bestimmung des 36° -Winkel in O notwendig ist, ergibt sich auch durch das Umfalten von H auf die Senkrechte durch \bar{V} zu CD , wobei die zugehörige Faltnie durch O geht.

Damit können wir in O einen Winkel mit der Größe 36° falten. Durch Spiegelung an MN erhalten wir einen Winkel mit der Größe 72° in O und damit einen Zentriwinkel des gesuchten regelmäßigen Fünfecks.

Die Faltkonstruktion, die in Abb. 15 gezeigt ist, geht davon aus, dass die Punkte U und V auf CD bereits gefaltet wurden. In Abb. 15d wird H auf die Senkrechte zu CH durch \bar{V} so gefaltet, dass die Faltnie durch O geht. Damit erzeugen wir in O einen Winkel der Größe 36° . $H_1 (= \bar{D}^*)$ ist der Bildpunkt von H auf dieser Senkrechten. Damit ist aber $|OH_1| = |OH|$ und damit auch $|OH_1| = |OM|$. Folglich geht der Inkreis des Quadrates auch durch H_1 . Durch die Faltung in Abb. 15d erzeugen wir den Punkt H_2 auf der Senkrechten zu CH durch \bar{V} . Auch H_2 liegt auf diesem Inkreis und es ist $|\sphericalangle H_1OH_2| = 72^\circ$. Damit ist H_1H_2 eine Seite des gesuchten regelmäßigen Fünfecks, der Inkreis des Quadrates ist der Umkreis des Fünfecks und M ist eine weitere Ecke dieses Fünfecks.

Durch das Falten von M auf H_1 (Abb. 15h) wird der Winkel $\sphericalangle MOH_1$ halbiert.

Den weiteren Faltprozess zeigen die Bilder Abb. 15j/k. In Abb. 15l wird entlang einer bereits vorhanden und noch zu erkennenden Faltnie geschnitten. Das Ergebnis ist in Abb. 15m zusammen mit dem quadratischen Faltpapier zu sehen. Es ist ein (exaktes) regelmäßiges Fünfeck.



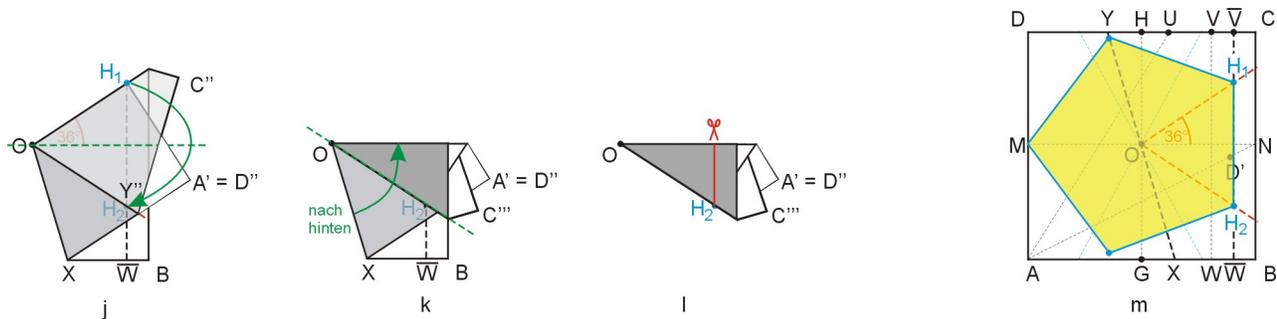


Abbildung 15: Der Faltprozess für ein regelmäßiges Fünfeck

5.2 Eine Näherung für das regelmäßige Fünfeck

Wir können auch die Überlegungen zum Falten eines Näherungsmoduls für den Fünfeckring hier nutzen, um eine Faltkonstruktion für ein angenähertes regelmäßiges Fünfeck zu finden.

Dazu starten wir mit einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ in dem die Mittelparallelen MN und GH gefaltet sind (Abb. 16a). O ist dabei wieder der Mittelpunkt des Quadrates.

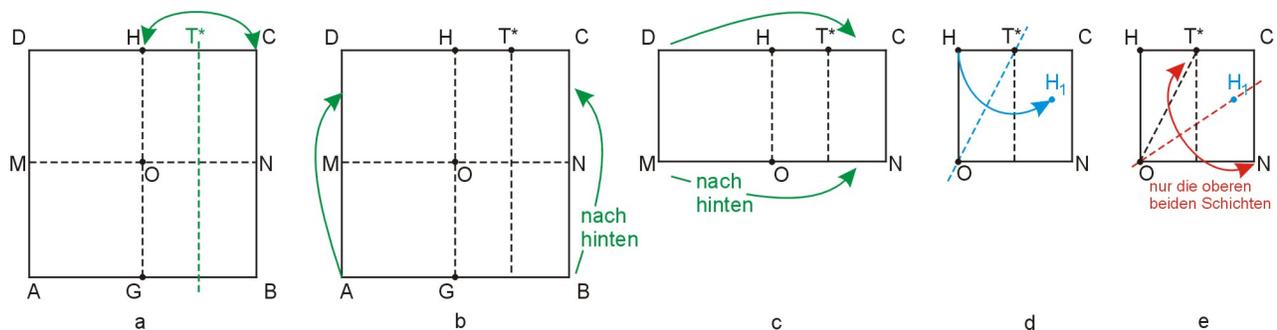


Abbildung 16: Der Faltprozess für ein angenähertes regelmäßiges Fünfeck

Nun falten wir C auf H und erhalten die Mittelsenkrechte von CH , die CH in T^* schneidet. Anschließend wird das Quadrat zweimal nach hinten halbiert (Abb. 16b und c), sodass wieder ein vierlagiges kleines Quadrat entsteht. H wird an OT^* umgefaltet und sein Bildpunkt H_1 wird auf $ONCH$ markiert. Anschließend werden die oberen beiden Papierlagen an OH_1 gefaltet (Abb. 16e). Das kleine Quadrat wird entfaltet und der Punkt M wird auf H_1 gefaltet. Dann wird weiter entsprechend Abb. 15h...l gearbeitet. Da der Winkel $\sphericalangle H_1ON$ (Abb. 16e) nur annähernd die Größe 36° hat, ist das Endergebnis bei dieser Faltung auch nur ein angenähertes regelmäßiges Fünfeck.

5.3 Eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal für ein regelmäßiges Fünfeck

Die Faltkonstruktion für das regelmäßige Fünfeck können wir auch in eine Konstruktion mit Zirkel und Lineal übertragen. Wir gehen dazu von einem Kreis k mit dem Mittelpunkt O aus, in den wir ein regelmäßiges Fünfeck einbeschreiben wollen. Dem Kreis beschreiben wir ein Quadrat $ABCD$ um, das den Kreis in den Punkten M, N, G und H berührt (Abb. 17). Wir zeichnen die Verbindungsstrecke AN ein und schneiden diese mit dem Kreis um A durch D . Der Schnittpunkt ist D' . Die Mittelsenkrechte von DD' schneidet CD in U . V ist der Mittelpunkt von CU und \bar{V} der Mittelpunkt von CV . Die

Senkrechte durch \bar{V} zu CD schneidet den Kreis k in den Punkten H_1 und H_2 . H_1H_2 ist eine Seite des gesuchten regelmäßigen Fünfecks.

Um das Fünfeck zu komplettieren schneiden wir den Kreis um H_1 durch H_2 und den Kreis um H_2 durch H_1 jeweils mit k . H_3 und H_4 sind die Schnittpunkte. $MH_4H_2H_1H_3$ ist das gesuchte regelmäßige Fünfeck.

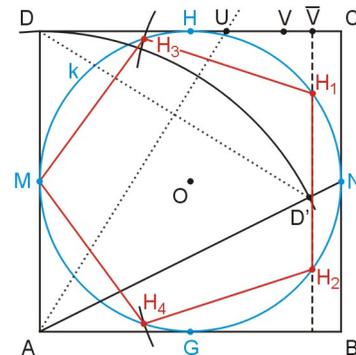


Abbildung 17:

Literatur

- [1] Kasahara, K.: *Origami - figürlich und geometrisch*. Augustus, 2000.
- [2] Oswald, N. M. R.: *Adolf Hurwitz faltet Papier*. Math. Semesterberichte, 62, S. 123-130, 2015.
- [3] Schmitz, M.: *Mathegami: Modulare Ringe mit 8, 7, 6, 4, 3 Ecken*. 2017.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite www.mathegami.de findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).