

MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de

September 2015, Update August 2017

Modulare Ringe mit 8, 7, 6, 4, 3 Ecken

Michael Schmitz

In [1], S. 92, wird ein achteckiger Sternenkranz (Abb. 1) vorgestellt, der aus acht gleichartigen Modulen zusammengesetzt wird. Die Betrachtung der Faltkonstruktion wird zeigen, dass es sich dabei um ein regelmäßiges Achteck handelt.

Eine naheliegende Modifikation dieses Moduls ergibt dann einen regelmäßigen Siebeneckring. Bei der Untersuchung der Faltkonstruktion wird sich allerdings herausstellen, dass es sich dabei nur um eine gute Näherungslösung handelt. Dies fällt aber bei der praktischen Umsetzung nicht auf.

Angeregt durch die beiden vorhergehenden Konstruktionen falten wir ein ähnliches Modul, das zum regelmäßigen Sechseckring führt. Auch analoge Module für das regelmäßige Viereck und das regelmäßige Dreieck werden vorgestellt.



Abbildung 1: Sternenkranz

Bleibt natürlich die Frage, ob man in dieser Art auch Module für andere regelmäßige n -Eckringe herstellen kann. Warum nicht! Für einen regelmäßigen Fünfeckring lässt sich ein entsprechendes Modul falten. Da dies etwas aufwendiger ist, wird dieses Modul in einem eigenen Mathegami (vgl. [2]) beschrieben. Module für regelmäßige 9-, ..., 12-Ecke sind in Vorbereitung.

1 Ein Achteck (Der Sternenkranz)

Nun falten wir das Modul für den achteckigen Sternenkranz nach der Anleitung aus Abb. 2. Im letzten Schritt, von Abb. 2c zu d, wird die hintere Schicht nach hinten, deckungsgleich zur vorderen Schicht gefaltet.

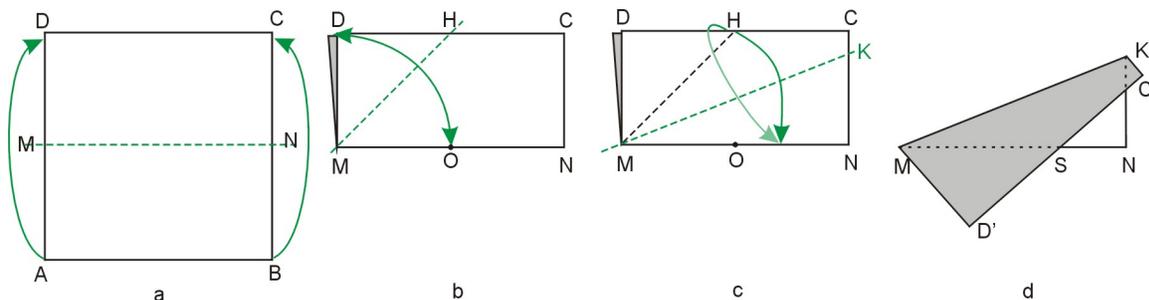


Abbildung 2: Der Faltprozess für das Achteckmodul

Davon brauchen wir insgesamt acht gleich gefaltete Module.

Der Zusammenbau von zwei Modulen wird in Abb. 3 gezeigt. Alle weiteren Module werden der Reihe nach angesetzt, das achte Modul dann noch mit dem ersten verbunden. Als Ergebnis erhalten wir den in Abb. 1 gezeigten achteckigen Sternenkranz.

Beim Zusammenbau ist darauf zu achten, dass alle Module die gleiche Orientierung haben (Abb. 3a). Das anzubauende Modul wird in die Öffnung des vorhergehenden Moduls soweit eingeschoben, dass es 'Kante an Kante' liegt (Abb. 3b). Schließlich falten wir die Spitzen des vorhergehenden Moduls, die über das eingesetzte Modul hinausragen in das Innere dieses Moduls (Abb. 3c) und verankern damit das neue Modul am vorhergehenden fest.

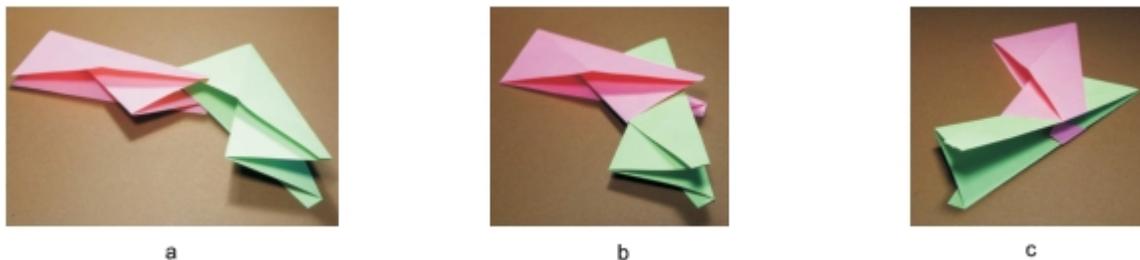


Abbildung 3: Der Zusammenbau

Nun schauen wir uns die Geometrie des gefalteten Moduls genauer an und betrachten dazu nur das obere Rechteck $MNCD$ (Abb. 4a). Wir gehen davon aus, dass unser Ausgangsquadrat die Seitenlänge a hat. Dann ist $|MN| = a$ und $|MD| = \frac{a}{2}$. Durch das Falten von D auf den Mittelpunkt O von MN wird die Winkelhalbierende des rechten Winkels $\sphericalangle NMD$ gefaltet, die DC im Punkt H , dem Mittelpunkt von DC schneidet. Folglich ist $MOHD$ ein Quadrat und $|\sphericalangle HMD| = 45^\circ$. Dann wird die Winkelhalbierende von $\sphericalangle NMH$ gefaltet. Dabei geht D nach D' , C nach C' und H nach S auf MN . Es ist klar, dass das Dreieck $MD'S$ gleichschenkelig und rechtwinklig (bei D') ist. Folglich ist $|\sphericalangle D'SM| = 45^\circ$ und damit auch $|\sphericalangle NSC'| = 45^\circ$. Schließlich ergibt sich damit, dass $|\sphericalangle D'SN| = 135^\circ$ ist. Dies ist aber die Größe eines Innenwinkels eines regelmäßigen Achtecks. Damit haben alle Innenwinkel des inneren Achtecks im Sternenkranz (Abb. 1) die Größe 135° . Auch die Seiten des Achtecks haben alle die Länge $|SN|$. Folglich ist dieses Achteck ein regelmäßiges Achteck.

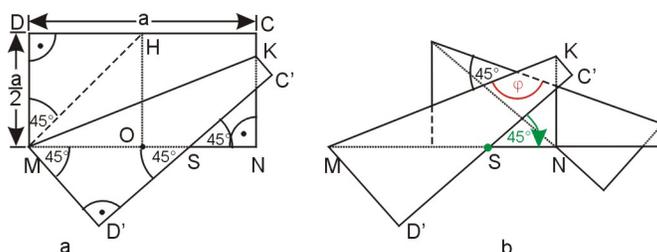


Abbildung 4:



Abbildung 5:

Um zu erkennen, dass auch das äußere Achteck (wenn wir uns die überstehenden Zacken wegdenken) regelmäßig ist, betrachten wir zwei zusammengesetzte Module (Abb. 4b). Wir müssen zeigen, dass $\varphi = 135^\circ$ ist. Dies erkennen wir, wenn wir uns überlegen, dass das zweite Modul aus dem ersten geometrisch durch eine Drehung um S mit dem Drehwinkel 45° und einer anschließenden Verschiebung, die S auf N abbildet, hervorgeht. Folglich schließen auch die Strecke MK mit der zugehörigen Bildstrecke im zweiten Modul einen Winkel von 45° ein. Das bedeutet, dass $\varphi = 135^\circ$ ist. Da auch die äußeren Strecken alle die gleiche Länge haben, ist das äußere Achteck ebenfalls regelmäßig.

Natürlich können wir auch die überstehenden Zacken in des Innere des Ringes einfallen, so dass auch außen ein “ungestörtes” regelmäßiges Achteck entsteht. Abb. 5 zeigt das Ergebnis.

2 Ein Siebeneck

Nun verändern wir das Falten des Moduls für den Sternenkranz. Die neue Faltfolge zeigt Abb. 6. Dieses Modul ist noch einfacher zu falten, da nur die vordere Schicht nach vorn, entlang der Diagonalen MC , und die hintere Schicht nach hinten, deckungsgleich zur vorderen Schicht, gefaltet wird.

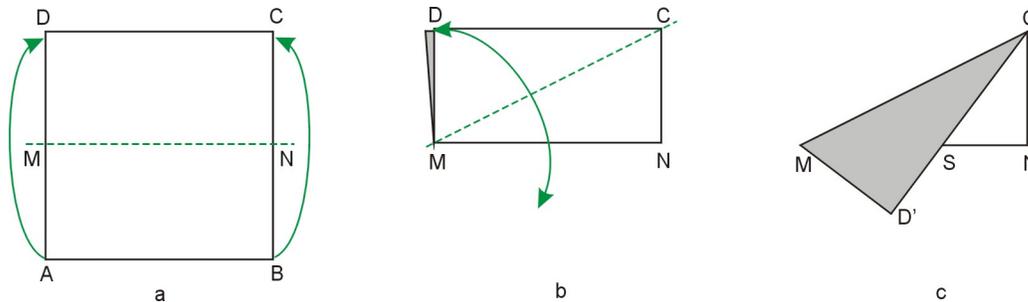


Abbildung 6: Der Faltprozess für das Siebeneckmodul

Von diesem Modul benötigen wir sieben Stück in identischer Bauweise. Der Zusammenbau ist in Abb. 7 gezeigt. Wie auch beim Sternenkranz wird im letzten Schritt der Verbindung zweier Teile die überstehende Ecke des zweiten Teils in das Innere des ersten Moduls gefaltet (vgl. Abb. 7d).

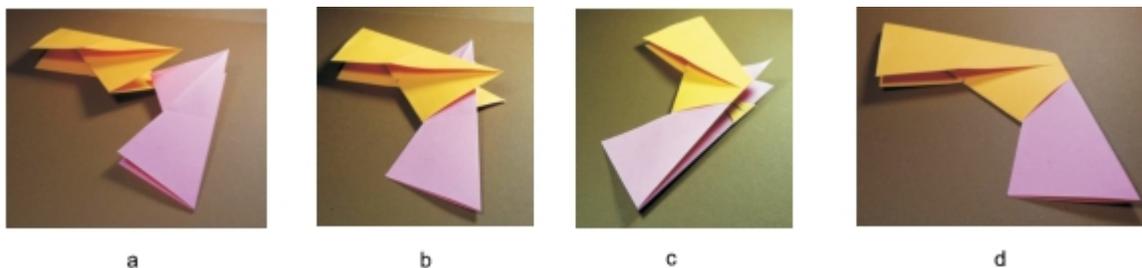


Abbildung 7: Der Zusammenbau

Auch für dieses Modul untersuchen wir seine Geometrie.

Weil D' das Spiegelbild von D an der Spiegelachse MC ist (Abb. 8a), ist $|\sphericalangle MCD| = |\sphericalangle D'CM| = \beta$. Da $\sphericalangle CSN$ und $\sphericalangle D'DC$ Winkel an geschnittenen Parallelen sind, ist $|\sphericalangle CSN| = 2\beta$ und damit $|\sphericalangle NSD'| = 180^\circ - 2\beta$. Der Winkel $\sphericalangle MCD$ ist im Dreieck MCD

bestimmt. Es gilt $\tan\beta = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$. Daraus folgt $\beta = 26,5650\dots^\circ$, woraus sich $|\sphericalangle NSD'| \approx 126,87^\circ$ ergibt. Vergleichen wir diese Winkelgröße mit der Größe $\frac{5}{7} \cdot 180^\circ \approx 128,57^\circ$ des Innenwinkels eines regelmäßigen Siebenecks, so können wir feststellen, dass in unserem Modul diese Größe nur angenähert erreicht wird.

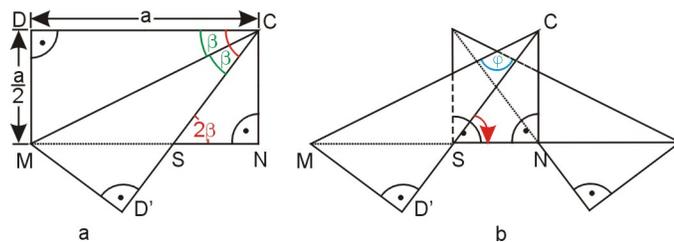


Abbildung 8:

Weil die beiden Dreiecke $MD'S$ und CSN rechtwinklig sind und $\sphericalangle D'SM \cong \sphericalangle CSN$ und $MD' \cong NC$ ist, folgt, dass diese beiden Dreiecke kongruent zueinander sind. Im Besonderen ist dann $D'S \cong SN$. Daher passen die zwei Module, die im Bild 8b gezeigt sind, so zusammen.



Abbildung 9:

Obwohl der Winkel bei S nur angenähert dem Innenwinkel eines regelmäßigen Siebenecks entspricht, lassen sich in der Praxis sieben Module gut zu einem Ring zusammenfügen, in dessen Inneren sich ein (angenähertes) regelmäßiges Siebeneck bildet. Abb. 9 zeigt den fertigen siebeneckigen Ring.

Dass auch der äußere Rand des Ringes ein (angenähertes) regelmäßiges Siebeneck ist, entnehmen wir der Abb. 8b. Der dort eingezeichnete Winkel φ hat nämlich die gleiche Größe wie $|\sphericalangle NSD'|$. Dies folgt wieder daraus, dass sich das zweite Modul aus dem ersten durch eine Drehung um S mit dem Drehwinkel $\sphericalangle NSC$ und einer anschließenden Verschiebung, die S auf N abbildet, ergibt.

3 Ein Sechseck

Um ein Modul der hier beschriebenen Art für ein regelmäßiges Sechseck zu erhalten, müssen wir die Ecke D des oberen Rechtecks $MNCD$ so an einer Faltnie durch A umfalten, dass ein Winkel von 60° zwischen MN und der umgefalteten Kante $D'K$ entsteht (Abb. 10). dann ist nämlich $|\sphericalangle NSD'| = 120^\circ$ und entspricht damit dem Innenwinkel eines regelmäßigen Sechsecks.

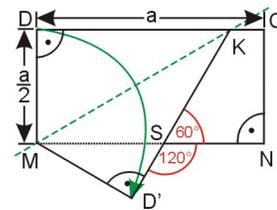


Abbildung 10:

An dieser ‘‘Zielfigur’’ ergibt sich sofort, dass $|\sphericalangle SMD'| = 30^\circ$ sein muss. Dann ist $|\sphericalangle DMD'| = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$. Da aber MK die Halbierende dieses Winkels ist, muss $|\sphericalangle DMK| = 60^\circ$ sein. Nun wissen wir, wie gefaltet werden muss, um ein Modul für ein regelmäßiges Sechseck zu erhalten. Das Falten eines 60° -Winkels lässt sich leicht realisieren.

In Abb. 11 ist die zugehörige Faltfolge gezeigt.

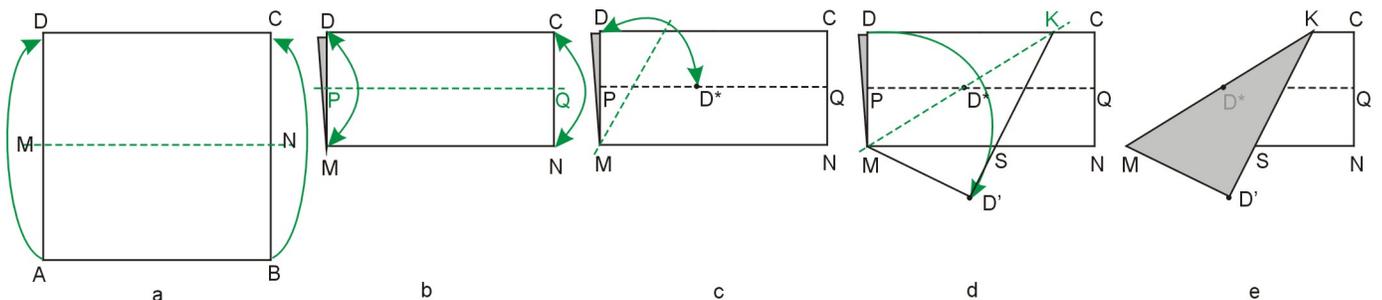


Abbildung 11: Der Faltprozess für das Sechseckmodul

Zuerst wird das Quadrat $ABCD$ parallel zu AB (Abb. 11a) und anschließend das oben liegende Rechteck parallel zu MN (Abb. 11b) halbiert. Dann falten wir den Punkt D so auf die Halbierungslinie PQ , dass die zugehörige Faltnie durch M geht. Mit D^* bezeichnen wir den Bildpunkt von D auf PQ . Weil PQ die Mittelsenkrechte von MD ist und $|MD| = |MD^*|$ wegen der Faltung gilt, ist das Dreieck MD^*D gleichseitig (Abb. 11c). Dies bedeutet aber, dass $|\sphericalangle DMD^*| = 60^\circ$, wie gefordert, ist. Nun falten wir an der Faltnie MD^* (Abb. 11d). Dabei geht D nach D' . Abschließend falten wir das

hintere Rechteck nach hinten, deckungsgleich zum vorderen (Abb. 11e). Auf diese Weise entsteht das gewünschte Modul, in dem der Winkel bei S 120° beträgt.

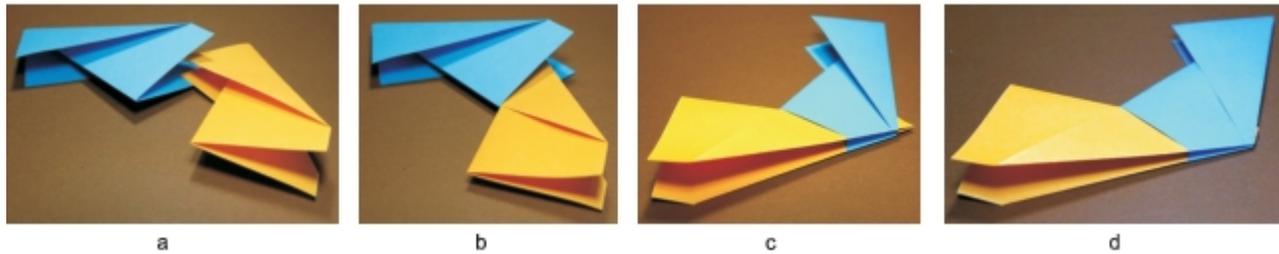


Abbildung 12: Der Zusammenbau

Sechs Stück dieser Module werden benötigt, um einen Ring zusammenzusetzen, in dem das innere Sechseck regelmäßig ist. Der Zusammenbau von zwei Modulen wird in Abb. 12 gezeigt. Nachdem das zweite Modul am ersten verankert wurde (Abb. 12c), werden die kleinen überstehenden Spitzen des zweiten Moduls in das Innere des ersten Moduls gefaltet. Das Ergebnis zeigt Abb. 12d. Fügen wir die restlichen vier Module der Reihe nach an, so erhalten wir einen geschlossenen Ring, der in Abb. 13 zu sehen ist.

Natürlich bildet auch der äußere Rand dieses sechseckigen Ringes ein regelmäßiges Sechseck. Die Begründung dafür erfolgt analog zu den entsprechenden Betrachtungen bei den anderen beiden Ringen.



Abbildung 13: Sechseck

4 Ein Viereck

Die hier benutzte Art der Module eignet sich nicht, um analog zu den vorhergehenden Ringen einen viereckigen Ring zusammenzustecken. Dazu müsste das Modul so gefaltet werden, wie es in Abb. 14 zu sehen ist. Damit ein quadratischer Ring entstehen kann, muss die Ecke D an einer Faltlinie durch A so gefaltet werden, dass die umgefaltete Kante senkrecht zu MN ist. Dann liegt aber das Bild D' von D auf MN und die Faltlinie durch A ist die Winkelhalbierende des rechten Winkels bei M . Zwei solche Module lassen sich nicht, auf die bisher übliche Weise, miteinander verbinden. Wir können die Module nur passend zusammenlegen, so wie es in Abb. 15 gezeigt ist. Natürlich bildet sich hier das regelmäßige Viereck im Innern und außen ein Achteck, das allerdings nicht regelmäßig ist.

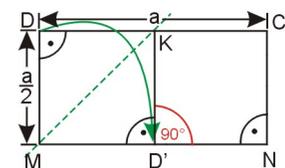


Abbildung 14:

Die Module lassen sich untereinander nicht verbinden, weil beim Umfalten entlang der Faltlinie MK (vgl. Abb. 14) die Seite MD direkt auf MN zu liegen kommt und dabei nichts übersteht, was in einem benachbarten Modul verankert werden könnte. Diesem Problem können wir begegnen, indem wir an Stelle des Ausgangsquadrates $ABCD$ ein Rechteck $ABCD$ zum Beispiel mit dem Seitenverhältnis $1 : 2$ benutzen. Abb. 16 zeigt die Faltfolge. Wir erkennen, dass dieses Modul mit dem Modul aus Abb. 14 übereinstimmt, nur, dass jetzt ein größerer Teil über MN hinausragt.

Dieses Modul ist allerdings noch nicht perfekt, da es entlang der Faltkante OK geschlossen ist. Auch dies können wir ändern. Dazu falten wir OK noch

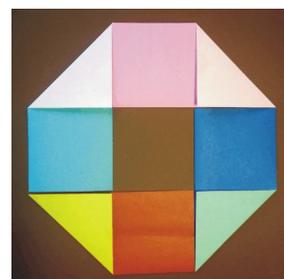


Abbildung 15: Viereck

einmal in die entgegengesetzte Richtung und falten das Modul dann wieder auf, wie es in der Abb. 17 zu sehen ist. Nun falten wir MO zur Bergfalte und drücken dabei die Talfalte ON nach unten, sodass das Modul wieder entsteht, in dem OK jetzt offen ist.

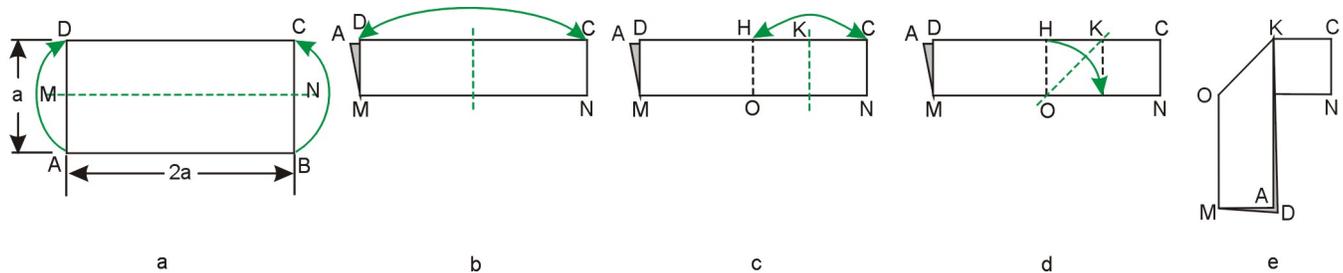


Abbildung 16: Neues Viereckmodul

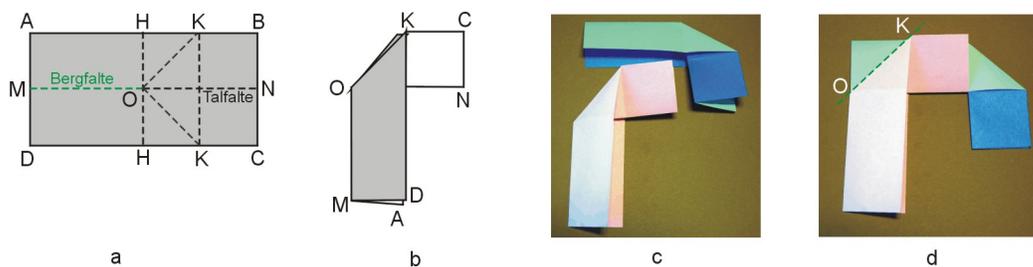


Abbildung 17: Neues Viereckmodul

In Abb. 17c und d sehen wir, wie zwei Module zusammengesetzt werden. Nun kann man das eine Modul entlang OK umfalten, sodass es mit dem anderen verbunden ist.

Eine kleine Verbesserung ergibt sich, wenn wir M so auf DK falten, dass die Faltlinie durch D geht (vgl. Abb. 18b und c). Anschließend wird der Gegenbruch gefaltet und dann M in das Innere geschoben.

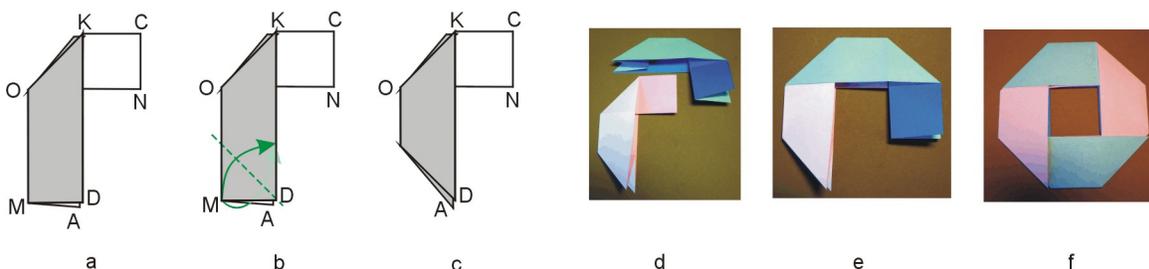


Abbildung 18: Neues Viereckmodul

In Abb. 18d und e ist der Zusammenbau zweier Module gezeigt und in Abb. 18f der fertige Viereckring. Das Quadrat ist im Inneren zu sehen, außen ein Achteck. Das Achteck ist auch hier nicht regelmäßig.

Nun verwenden wir an Stelle des Rechtecks $ABCD$ mit dem Seitenverhältnis $1 : 2$ ein Rechteck $ABCD$ mit dem Seitenverhältnis $2 : (3 + \sqrt{2})$, so wie es in Abb. 19 zu sehen ist.

Die Faltfolge ist wie in Abb. 16 und 18, nur dass jetzt ein Abschnitt die Länge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ hat. Dadurch entsteht nach dem Zusammensetzen der vier Module ein Ring, der im Inneren ein regelmäßiges Viereck und im Äußeren ein regelmäßiges Achteck bildet. Beide Polygone haben die Seitenlänge $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

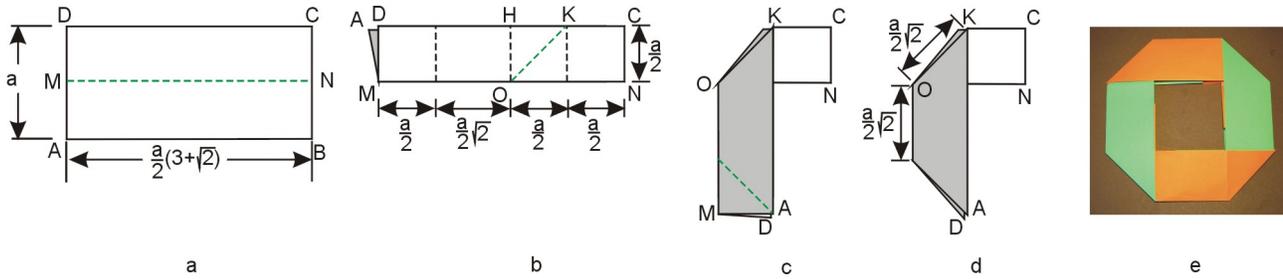


Abbildung 19: Neues Viereckmodul 2

5 Ein Dreieck

Um ein Modul der hier verwendeten Art für ein regelmäßiges Dreieck zu erhalten, falten wir zuerst wieder aus dem quadratischen Faltpapier $ABCD$ ein Rechteck $MNCD$. Dann müssen wir die Ecke D des oberen Rechtecks $MNCD$ so an einer Faltlinie durch M umfalten, dass ein Winkel von 120° zwischen MN und (der Verlängerung von) KD' entsteht (vgl. Abb. 20a). Der Ergänzungswinkel in S beträgt dann 60° und entspricht damit der Größe eines Innenwinkels im regelmäßigen Dreieck.

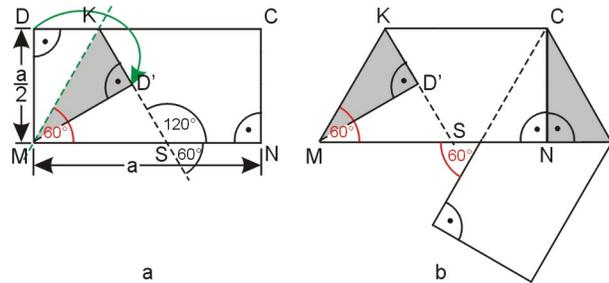


Abbildung 20:

Weil auch $|\angle MSD'| = 60^\circ$ ist, folgt sofort $|\angle SMD'| = 30^\circ$. Dann folgt $|\angle DMD'| = 60^\circ$. Da MK die Halbierende des Winkels $\angle DMD'$ ist, ergibt sich $|\angle DMK| = |\angle KMD'| = |\angle D'MS| = 30^\circ$. Das heißt aber, dass wir im Rechteck $MNCD$ den Punkt D so umfalten müssen, dass die Faltgerade durch M geht und mit MN einen Winkel der Größe 60° einschließt. Dies läßt sich aber gut realisieren, wie die Faltfolge in Abb. 21 für dieses Modul zeigt.

Da sich zwei Module nicht miteinander verbinden lassen, können wir sie nur, wie auch schon beim Quadrat, passend zusammenlegen (vgl. Abb. 20b).

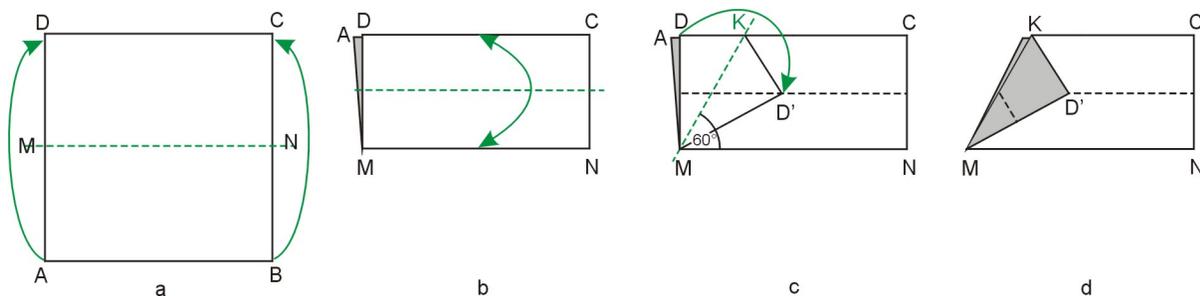


Abbildung 21: Dreiecksmodul

Abb. 22 zeigt drei zusammengelegte Module, im Inneren das regelmäßige Dreieck und außen ein Sechseck.

Da sich diese Module untereinander nicht verbinden lassen, gehen wir analog, wie beim Viereck, vom

quadratischen zum rechteckigen Faltpapier über, um entsprechende Module zu falten. Dazu nutzen wir rechteckiges Faltpapier mit dem Seitenverhältnis 1 : 3. In Abb. 23 ist die Faltfolge gezeigt.

Um wieder den Innenwinkel eines gleichseitigen Dreiecks zu erhalten, falten wir entsprechend Abb. 23c den Mittelpunkt H von CD so auf die zu MN parallele Mittellinie, dass die zugehörige Faltlinie durch O geht.

Nach dem Auffalten (vgl. Abb. 23d) wird entlang OK_1 und OK_2 so gefaltet, dass K_1 auf K_2 zu liegen kommt, ON Tal-falte bleibt und MO zur Bergfalte wird. Das fertige Modul ist in Abb. 23f zu sehen. Abb. 24 zeigt den aus drei Modulen zusammengesetzten Ring, in dessen Inneren sich das regelmäßige Dreieck bildet und im Äußeren ein Sechseck zu sehen ist.



Abbildung 22:

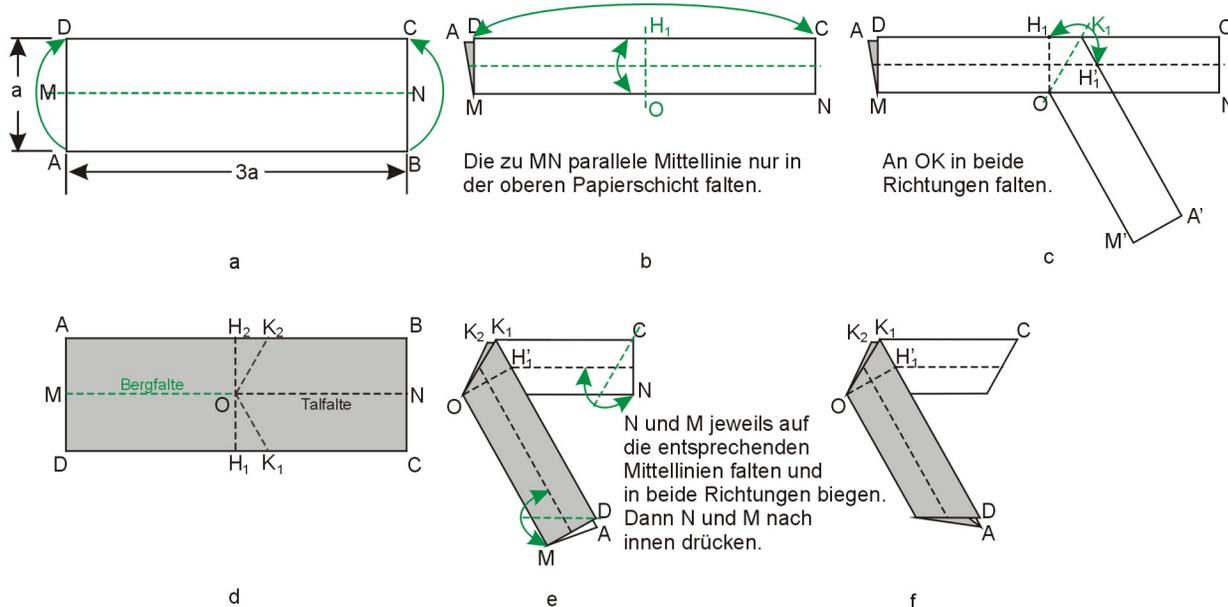


Abbildung 23: Dreiecksmodul 2

Als nächstes berechnen wir die Seitenlänge s_3 des inneren Dreiecks und die Seitenlängen s_{61} und s_{62} des äußeren Sechsecks. Dazu betrachten wir ein aufgefaltetes Modul (vgl. Abb. 25) in dem diese Seitenlängen eingetragen sind. Wir gehen gleich davon aus, dass das Rechteck, aus dem das Modul gefaltet wurde, ein Seitenverhältnis von 1 : k hat.



Abbildung 24: Dreiecksring

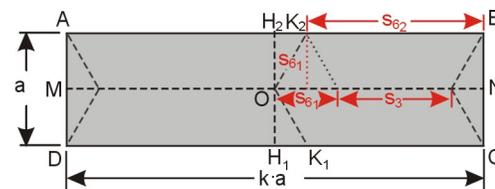


Abbildung 25: Dreiecksmodul 2

Damit können wir die gesuchten Seitenlängen gleich in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses des Ausgangsrechtecks bestimmen und Grenzfälle finden.

Weil s_{61} die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe $\frac{a}{2}$ ist, gilt $s_{61} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{3} \sqrt{3}$.

Für s_3 erhalten wir damit $s_3 = \frac{k \cdot a}{2} - s_{61} - \frac{1}{2} s_{61} = k \frac{a}{2} - \frac{2}{3} \frac{a}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{3} \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{2} (k - \sqrt{3})$.

Für s_{62} erhalten wir damit $s_{62} = \frac{k \cdot a}{2} - \frac{1}{2} s_{61} = k \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{2} (k - \frac{1}{3} \sqrt{3})$.

Natürlich muss $s_3 \geq 0$ sein, d.h., $\frac{a}{2}(k - \sqrt{3}) \geq 0$, also $k \geq \sqrt{3}$.

Für $k = \sqrt{3}$ ist $s_3 = 0$ und damit ist kein Dreieck mehr im Innern des Ringes vorhanden. Für $k = \sqrt{3}$ wird $s_{62} = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$, also $s_{61} = s_{62}$. Damit ist aber das äußere Sechseck gleichseitig. Da es auch gleichwinklig ist, folgt, dass das äußere Sechseck regelmäßig ist.

Für $k > \sqrt{3}$ ist $s_3 > 0$ und $s_{61} \neq s_{62}$. Damit ist nur für $k = \sqrt{3}$ das äußere Sechseck regelmäßig, während das innere Dreieck zu einem Punkt schrumpft.

In Abb. 26 ist gezeigt, wie man aus einem Rechteck mit dem Seitenverhältnis von etwa 1 : 2 ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1 : $\sqrt{3}$ erhält.

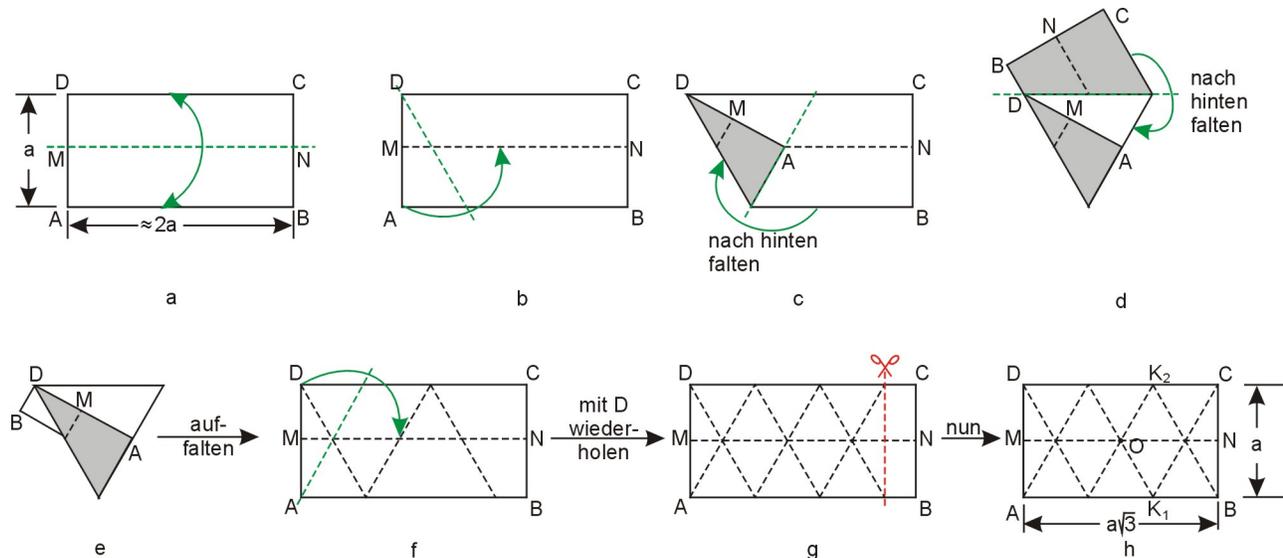


Abbildung 26: Rechteck zum Dreiecksmodul 3

Ausgehend von diesem Rechteck mit dem Seitenverhältnis 1 : $\sqrt{3}$ (vgl. Abb. 26h) falten wir das zweite Dreiecksmodul. ON ist eine Talefalte, während OK_1 und OK_2 Bergfalten sind. Nun falten wir entlang OK_1 und OK_2 , sodass K_1 und K_2 aufeinander fallen, wobei MO zur Bergfalte umgefaltet wird. Das Ergebnis ist in Abb. 27a zu sehen. Nun werden sowohl M als auch N entlang der entsprechenden Faltnlinien nach innen gefaltet, wie es in Abb. 27b zu sehen ist. Damit ist ein neues Modul entstanden, das analog zu dem aus Abb. 23 ist. Wie dort brauchen wir auch hier drei Module, die entsprechend zusammengesetzt werden. In Abb. 28 ist dieses Zusammensetzen gezeigt.

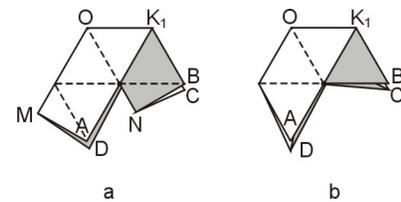


Abbildung 27: Dreiecksmodul 3

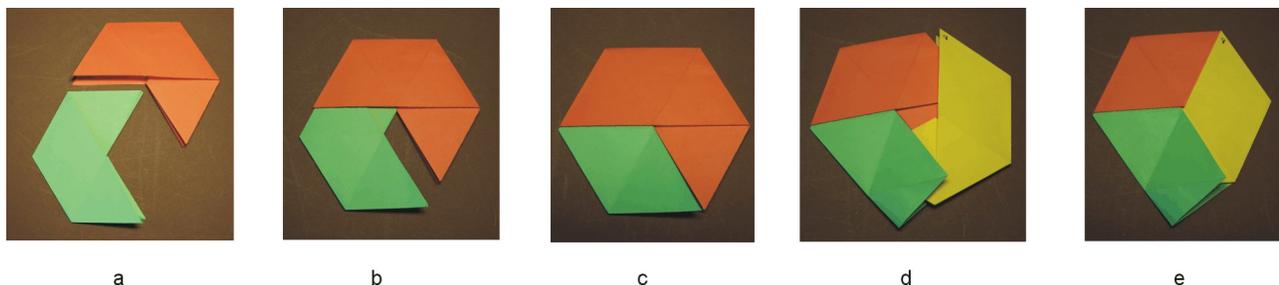


Abbildung 28: Zusammensetzen der Module

Zum Einsetzen des dritten Moduls ist es sinnvoll die eingefaltete Ecke wieder auszufalten (vgl. Abb. 28d), um dann das dritte Modul einzusetzen. Anschließend wird die ausgefaltete Ecke wieder zurück gefaltet, sodass alle Module untereinander verbunden sind.

In Abb. 29 ist der fertige Dreiecksring zu sehen, der im Inneren kein Dreieck mehr enthält, aber außen ein regelmäßiges Sechseck bildet.

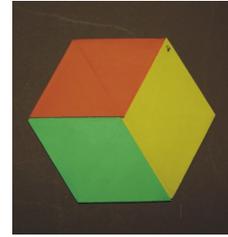


Abbildung 29: Ein regelmäßiges Sechseck

Literatur

- [1] Gross, G. M.: *Minigami*. Gondrom, 2007.
- [2] Schmitz, M.: *Mathegami: Ein modularer Ring mit 5 Ecken*. 2017.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite www.mathegami.de findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).