Mathegami

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de Oktober 2015

Eine Fünfeckkonstruktion von Carmen Sprung

Michael Schmitz

Auf der *Internationalen Tagung zur Didaktik des Papierfaltens* in Freiburg im Breisgau stellte Frau Carmen Sprung 2010 eine Faltkonstruktion für ein Fünfeck vor. Die Faltanleitung ist der Abb. 1 zu entnehmen.

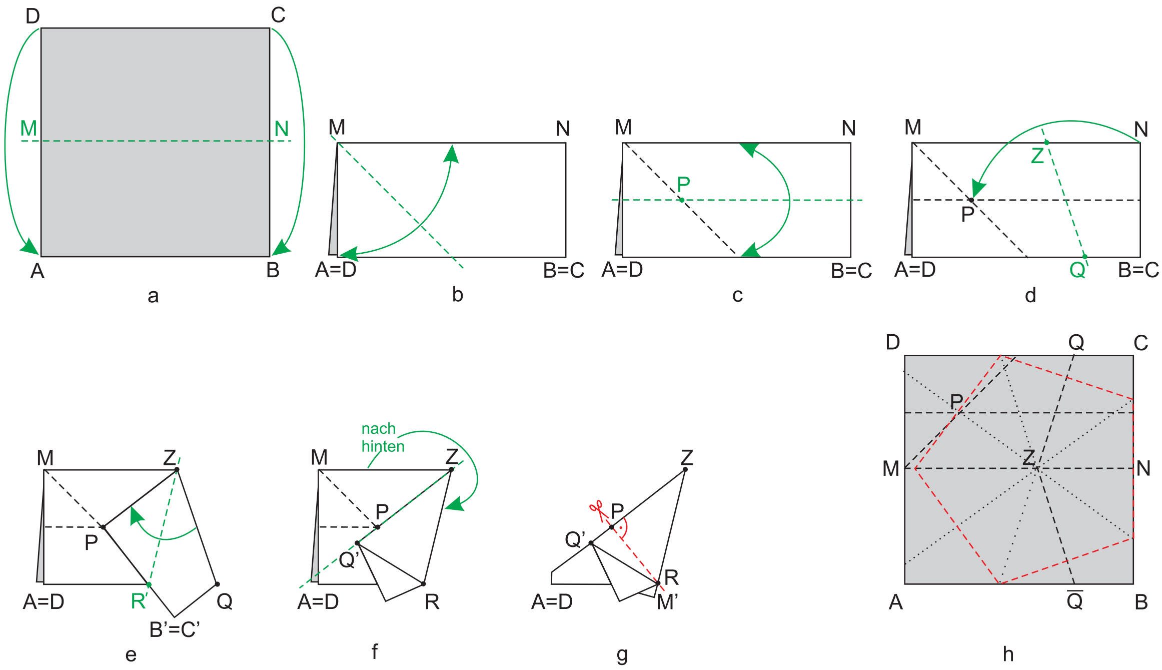

Abbildung 1: Der Faltprozess für das Fünfeck von Carmen Sprung

Wir beginnen mit einem quadratischem Faltpapier $ABCD$ und falten die obere Hälfte direkt auf die untere. MN ist die zugehörige Faltlinie. Anschließend wird die umgefaltete Ecke D der oberen Schicht so auf MN gefaltet, dass die Faltlinie durch M geht (Abb. 1b). Das umgefaltete Dreieck wird wieder zurück gefaltet. Dann wird das oben liegende Rechteck $DCNM$ parallel zu DC halbiert. Die zugehörige Faltlinie schneidet die vorhergehende Faltlinie im Punkt P (Abb. 1c). Nun falten wir N auf P, wobei die Faltlinie QZ entsteht (Abb. 1d). Da diese Faltlinie später noch einmal betrachtet wird, soll hier schon darauf hingewiesen werden, dass QZ die Mittelsenkrechte von NP ist.

Wir falten ZQ auf ZP. Dabei geht die Faltlinie durch Z und markiert am unteren Rand den Punkt R (Abb. 1e). Nun wird noch ZM auf ZR entlang ZO nach hinten umgefaltet (Abb. 1f). Dann liegen bei Z zehn Schichten Papier aufeinander, die gut übereinander zu passen scheinen. Folglich müsste der Winkel $\sphericalangle PZR$ bei Z die Größe $36°$ haben.

Abschließend schneiden wir durch P senkrecht zu ZP die Papierlagen durch und erhalten nach dem Entfalten ein sehr regelmäßig aussehendes Fünfeck mit dem Mittelpunkt Z. Für Abb. 1f wurde die Figur nicht zerschnitten, sondern nur entlang der Schnittlinie umgefaltet. Dadurch erkennt man nach dem Entfalten das Fünfeck gut im Ausgangsquadrat.

Nun müssen wir prüfen, ob das gefaltete Fünfeck regelmäßig ist. Dazu können wir z.B. den Winkel $\sphericalangle MZQ$ (Abb. 1e) berechnen. Falls das Fünfeck regelmäßig ist, müsste dieser Winkel die Größe $3 \cdot 36° = 108°$ haben. Zur Berechnung legen wir das entfaltete Quadrat in ein Koordinatensystem, so wie es in Abb. 2 gezeigt ist. Wir gehen davon aus, dass die Kantenlänge des Quadrates 4 ist.

Wir berechnen die Größe des Winkels $\sphericalangle QZN$ und erhalten daraus die gesuchte Winkelgröße. Um die Größe des Winkels $\sphericalangle QZN$ zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Koordinaten der beiden Punkte Z und Q.

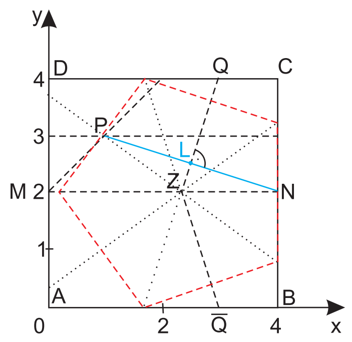

Abbildung 2:

Aufgrund der Faltkonstruktion sind von P und N die Koordinaten bekannt: $P(1;3)$ und $N(4;2)$. Dann hat die Gerade durch P und N den Anstieg $m_{PN} = -\frac{1}{3}$. Weil ZQ die Mittelsenkrechte von PN ist, geht die Gerade durch Z und Q auch durch den Mittelpunkt L von PN und steht auf dieser Strecke senkrecht. Folglich gilt für den Anstieg dieser Geraden $m_{ZQ} = -\frac{1}{m_{PN}} = 3$. Da L die Koordinaten $L(\frac{5}{2}; \frac{5}{2})$ hat, ergibt sich $y = 3x - 5$ für die Gleichung der Geraden durch Z und Q.

Weil die y-Koordinaten von Z und Q bekannt sind ($y_Z = 2$ und $y_Q = 4$), ergeben sich mit der Gleichung $y = 3x - 5$ die zugehörigen x-Koordinaten: $x_Z = \frac{7}{3}$ und $x_Q = 3$. Damit berechnen wir nun $tan \sphericalangle QZN = \frac{y_Q - y_Z}{x_Q - x_Z} = \frac{2}{3 - \frac{7}{3}} = 3$. Daraus ergibt sich $|\sphericalangle QZN| \approx 71{,}565°$ und folglich $|\sphericalangle MZQ| = 180° - |\sphericalangle QZN| \approx 108{,}435°$. Damit führt die Faltkonstruktion nicht zu einem regelmäßigem Fünfeck. Aber, aufgrund der geringen Abweichung vom gewünschten Wert 108°, fällt dies bei der praktischen Ausführung der Faltung nicht auf.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).