Mathegami
Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de September 2015

Ein Grashalm aus Papier – geometrische Betrachtungen –

Michael Schmitz

Blättert man in Origamibüchern, etwa [2], [3], [4] und [5], so kann man (als Mathematiklehrer) schnell die faszinierenden Möglichkeiten entdecken, die Origami auch für den Mathematikunterricht bieten kann. Man findet in diesen Büchern nicht nur schöne Produkte, sondern es kommen genauso Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, regelmäßige Vielecke, Rhomben, reguläre Körper, ..., Kongruenz, Spiegelung, Strecken- und Flächenverhältnisse und vieles mehr vor. Hier kann man gut im Mathematik- und speziell im Geometrieunterricht anknüpfen.

Natürlich soll auch betont werden, dass beim Falten von Papier ebenso exaktes Arbeiten, die Feinmotorik und das Vorstellungsvermögen unserer Schüler weiterentwickelt werden. Und es macht Spaß!

Die Bedeutung des Papierfaltens für Bildung und Erziehung wurde in unserem Kulturkreis bereits von Fröbel (1782 - 1852) erkannt und genutzt. So waren u. a. Falten, Schneiden und Kleben von Papier fester Bestandteil in seiner *Kindererziehung*.

In [1] wird auf eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten der alten japanischen Papierfaltkunst im Mathematikunterricht hingewiesen.

Wir nennen die Verbindung von Mathematik und Origami kurz *Mathegami*.

In dem folgenden kleinen Beitrag geht es um einen Grashalm (Abb. 1), der aus einem quadratischen Stück Papier gefaltet wird. Zum Abschluss kann der Halm noch mit einer ebenfalls gefalteten Blüte gekrönt werden. Auch ein Vogel oder ein achtzackiger Stern sind möglich (Abb. 2). Neben der Faltbeschreibung ergeben sich zahlreiche elementargeometrische Fragen, die hier natürlich im Zentrum stehen sollen.

Abbildung 1:

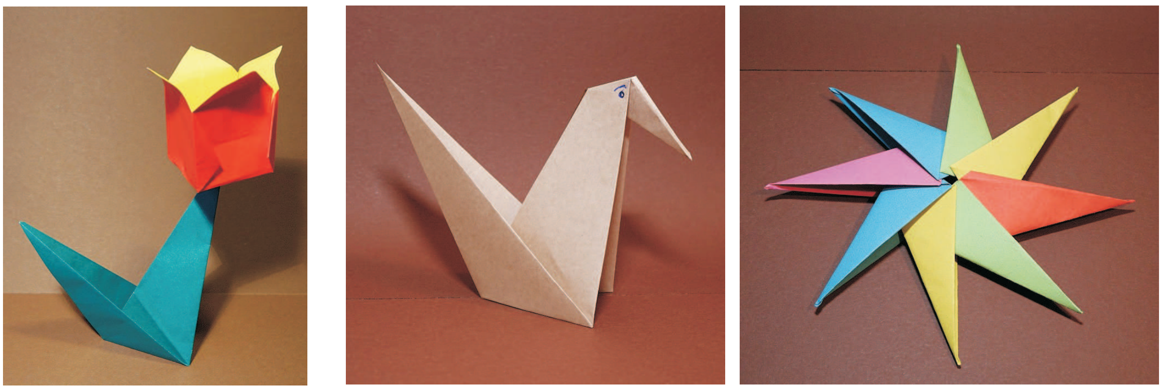

Abbildung 2: Blume-Vogel-Stern

Zuerst beschreiben wir nach [2], wie wir aus einem quadratischen Papier die im Origami als *Gras* bekannte Figur falten können.

Wir beginnen mit einem quadratischen Papier ABCD, wie es im Abb. 3 zu sehen ist und falten es entlang der Diagonalen AC und wieder auseinander.

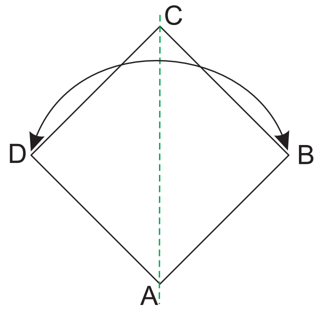

Abbildung 3:

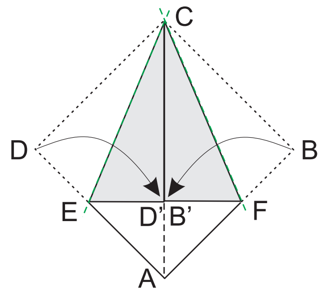

Abbildung 4:

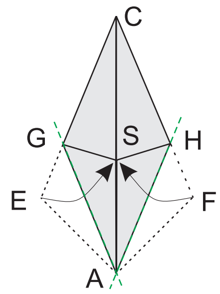

Abbildung 5:

Nun werden die Kanten CD und CB an die gefaltete Diagonale herangefaltet (Abb. 4). Dabei gehen D nach D' und B nach B'. Außerdem bestimmen die Faltlinien die Punkte E und F auf AD bzw. AB. Das entstandene Viereck AFCE ist ein Drachenviereck. Dies ergibt sich aus der Symmetrie dieser Figur zur Diagonalen AC.

Als nächstes werden die Kanten AE und AF an die Diagonale AC herangefaltet (Abb. 5). Die Bilder von E und F fallen auf AC in einem Punkt zusammen, der mit S bezeichnet wird. Die Faltlinien bestimmen zwei Punkte G und H auf CE bzw. CF. Das Viereck AHCG ist ein Rhombus.
Zur Begründung können wir feststellen, dass aufgrund der Symmetrie des Vierecks zur Diagonalen AC sofort $|AG| = |AH|$ und $|CG| = |CH|$ folgt. Nun muss nur noch gezeigt werden, dass $|AH| = |CH|$ gilt. Diese Gleichheit ergibt sich aber aus den Größen der Winkel $\sphericalangle HCA$ und $\sphericalangle HAC$, die jeweils $22,5^0$ betragen, da sich beim Falten die beiden Winkel $\sphericalangle EAS \cong \sphericalangle DAC$ und $\sphericalangle FAS \cong \sphericalangle BAC$ halbieren. Damit ist aber das Dreieck AHC gleichschenklig und damit $|AH| = |CH|$. AHCG ist damit tatsächlich ein Rhombus.

Um nun aus dem flachen Rhombus das *Origami-Gras*, eine räumliche Figur zu erhalten, falten wir den Rhombus entlang der Kanten GS und HS, und nur auf der Länge dieser Kanten, jeweils nach oben und dann wieder zurück. Zum Abschluss falten wir die Kante CS entgegen ihrer Faltrichtung. Dabei bewegt sich das ganze Gebilde, sodass die im Foto (Abb. 6) gezeigte Figur entsteht.

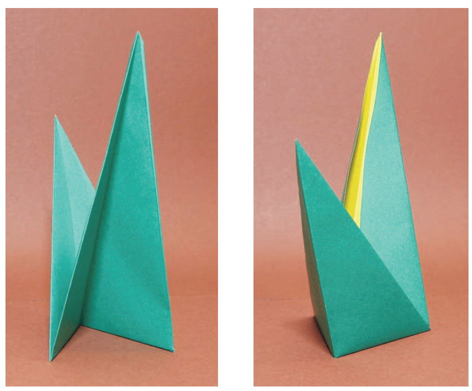

Abbildung 6: Aus verschiedenen Richtungen

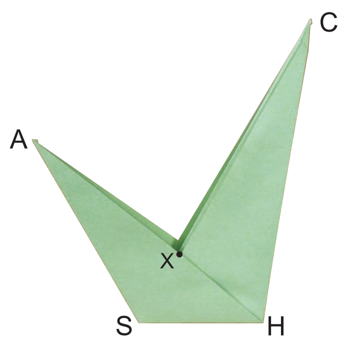

Abbildung 7: Der Grashalm

Falten wir zwei solche Figuren aus gleich großen Ausgangsquadraten, so können wir durch übereinanderlegen leicht sehen, dass das außen liegende Dreieck SHA kongruent zu dem aus der Figur herausragenden Teil XHC ist (Abb. 7). In den Bildern 8 und 9 sehen wir, wie die beiden Figuren übereinander gelegt sind.

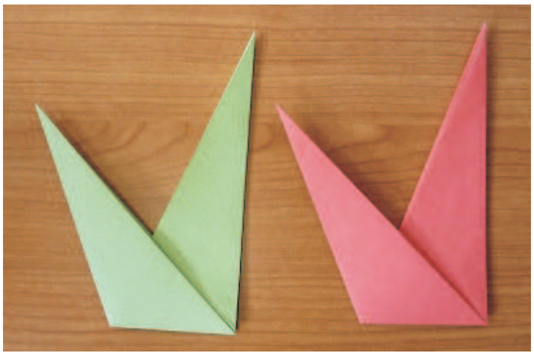

Abbildung 8: 2 Halme

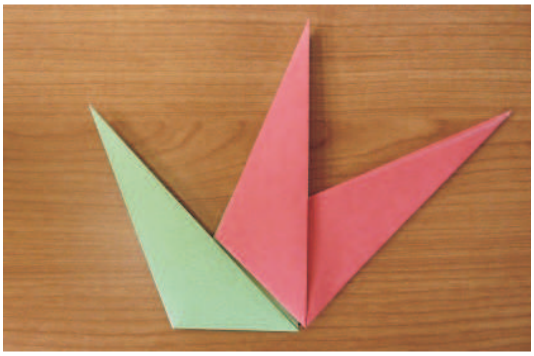

Abbildung 9: 2 Halme übereinander

Diese Kongruenz wollen wir im Folgenden begründen.

Weil die Ausgangsfigur ein Rhombus war, ist in den beiden betrachteten Dreiecken $|HA| = |HC|$. Diese beiden Seiten werden rot markiert. Außerdem gilt $|\sphericalangle SAH| = |\sphericalangle XCH| = 22,5^0$.

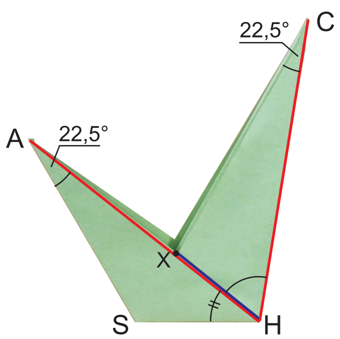

Abbildung 10:

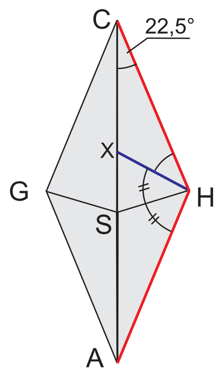

Abbildung 11:

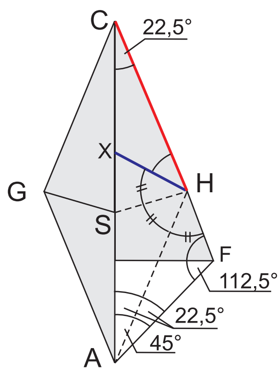

Abbildung 12:

Nun zeigen wir noch, dass $|\sphericalangle SHA| = |\sphericalangle XHC| = 45^0$ ist. Dazu wird die Strecke HX auf dem Dreieck XHC (blau) markiert. Auch die Winkel, deren Größen untersucht werden sollen, werden markiert (Abb. 10). Nun wird die Figur wieder zum Rhombus auseinandergefaltet (Abb. 11). Dabei ist klar, dass $|\sphericalangle AHS| = |\sphericalangle SHX|$ gilt, weil diese beiden Winkel in der gefalteten Figur übereinander gelegen haben.
Nun faltet man die bei S liegende Ecke entlang der Faltlinie AH ebenfalls wieder auf (Abb. 12). Dann ist der Winkel $\sphericalangle FHA$ kongruent zu den beiden anderen Winkeln in H. Außerdem ist $|\sphericalangle CAF| = 45^0$. Damit ergibt sich aber im Dreieck AFC, dass $|\sphericalangle AFC| = 112,5^0$ gilt. Folglich ist auch $|\sphericalangle HSA| = 112,5^0$ und damit ergibt sich im Dreieck AHS, dass $|\sphericalangle AHS| = 45^0$ ist. Also liegen in H drei Winkel der Größe 45^0 und folglich muss der vierte Winkel $\sphericalangle XHC$ ebenfalls die Größe 45^0 haben. Damit haben wir aber die Kongruenz der beiden Dreiecke SHA und XHC nachgewiesen.

Eine kleine Modifikation des Grashalmes lässt einen Vogel entstehen. Dazu falten wir den längeren Teil des Grashalms etwas schräg zur äußeren Kante in beide Richtungen hin und zurück (Abb. 13). Nun drücken wir, entlang des eben gefalteten Knickes, die obere Spitze zwischen die beiden Schichten des Grashalmes. Dadurch entsteht der Schnabel des Vogels (siehe Abb. 2), nur die Augen müssen noch angemalt werden.

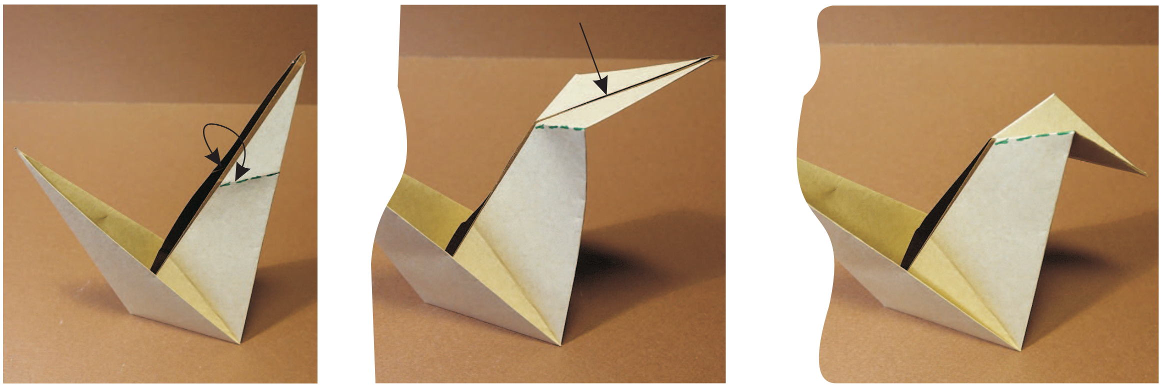

Abbildung 13: Vom Halm zum Vogel

Nun beachten wir, dass die beiden Winkel $|\sphericalangle SHA|$ und $|\sphericalangle CHX|$ (vgl. Abb. 10) jeweils die Größe 45^0 haben. Weil 45 ein Teiler von 360 ist, lassen sich acht Grashalme, ohne Lücke, um die Ecke H anordnen. Damit das Ganze auch einen Stern (vgl. Abb. 2, vgl. [5]) ergibt, der zusammenhält, werden die acht Grashalme benötigt, die wie folgt verändert werden: Jeder der acht Grashalme wird wieder zum Rhombus aufgefaltet und so auf den Tisch gelegt, dass die geschlossene Fläche oben liegt. Dann sind die gefaltete Diagonale AC sowie die beiden Faltlinien HS und GS zu erkennen (Abb. 14). Nun falten wir HC auf HS und GC auf GS, aber jeweils nur bis zur Diagonalen AC. Auf dieser Diagonalen entsteht der Schnittpunkt S' dieser Faltlinien. Nun wird die Figur wieder zum Grashalm zusammengefaltet, diesmal aber entlang der neuen Faltkanten HS und GS.

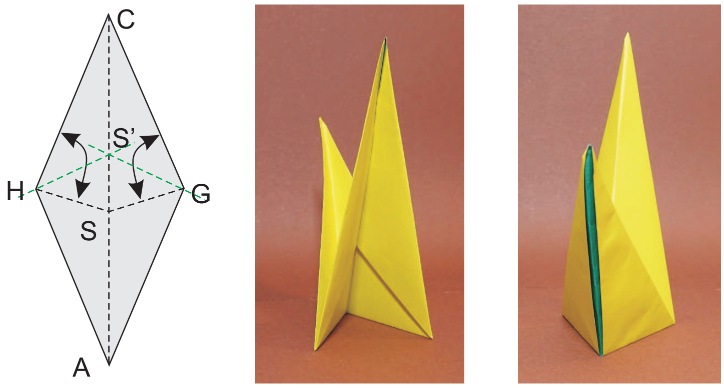

Abbildung 14:

Im Abb. 14 ist der fertig gefaltete Grashalm aus zwei unterschiedlichen Ansichten zu sehen.

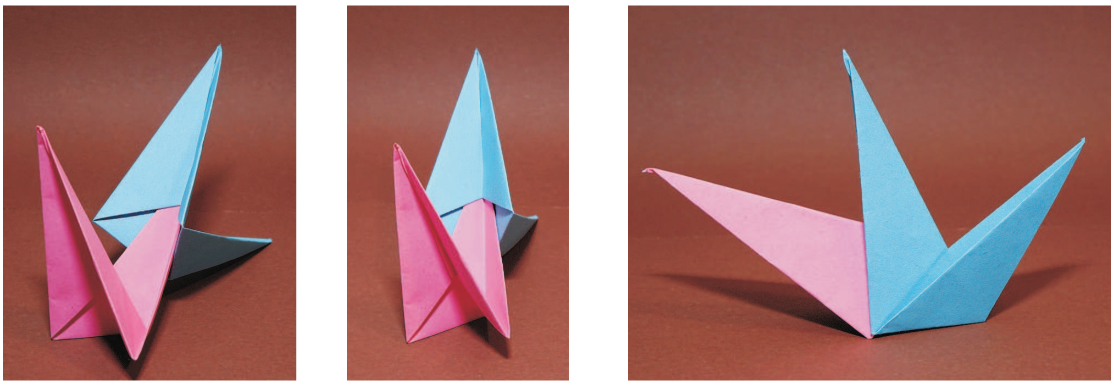

Abbildung 15: Ein Stern entsteht

Im Unterschied zu dem am Anfang gefalteten Grashalm hat der neue Grashalm an dem innen liegenden Dreieck zwei Laschen. Unter diese Laschen lässt sich das außen liegende Dreieck eines weiteren

Grashalmes schieben, so wie es im Abb. 15 gezeigt ist.

Wegen der vorher nachgewiesenen Kongruenz der beiden Dreiecke passt das eingeschobene Dreieck genau unter die beiden Laschen.

Nun werden weitere sechs neue Grashalme der Reihe nach eingearbeitet und abschließend der achte mit dem ersten ebenso verbunden. Diese letzte Verbindung ist nicht ganz so einfach herzustellen. Als Ergebnis erhalten wir aber einen schönen achteckigen Stern, so wie er im Abb. 2 zu sehen ist.

Bleibt zum Abschluss noch die Tulpenblüte (vgl. [5]) für den Grashalm. Diese falten wir nach der Anleitung, die im Abb. 16 gezeigt ist. Dazu benutzen wir wieder ein quadratisches Faltpapier. Dieses Quadrat sollte eine Kantenlänge haben, die etwa $\frac{2}{3}$ der Kantenlänge des Quadrates für den Grashalm beträgt.

Zuerst werden die beiden Diagonalen des Quadrates gefaltet. Anschließend wird das Papier gewendet und die beiden Mittellinien (parallel zu den Kanten) werden gefaltet. Anschließend werden die Quadratecken zusammengebracht, sodass ein neues, kleineres Quadrat entsteht. Die weitere Faltung ist in der Bildfolge zu sehen.

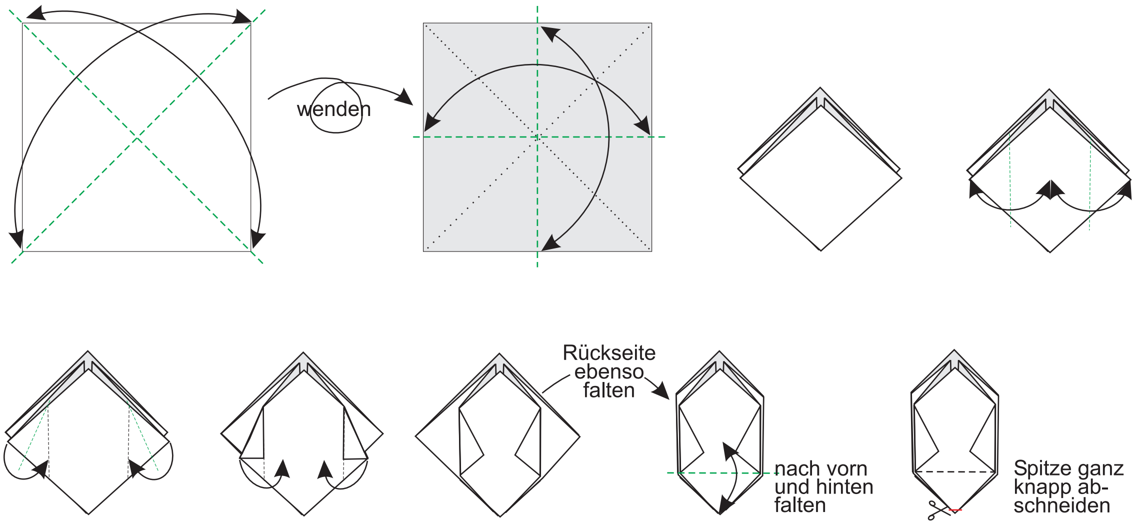

Abbildung 16: Die Blüte

Zum Abschluss wird die Blüte von innen heraus geformt. Die Blüte wird durch das kleine Loch im Boden auf eine Spitze des Grashalms aufgesetzt und fertig ist die Tulpe (siehe Abb. 2).

Literatur

[1] Henn, H.-W.: *Origamics – Papierfalten mit mathematischem Spürsinn.* In: Die neue Schulpraxis, Heft 6/7, 2003, S. 49-53.

[2] Kasahara, K.: *Origami figürlich und geometrisch.* Augustus-Verlag, München, 2000.

[3] Kasahara, K.: *Origami ohne Grenzen.* Knaur, 2004.

[4] Mitchell, D.: *Mathematical Origami.* Tarquin, 1997.

[5] Mulatinho, P.: *Pfiffiges Origami.* Knaur, 2003.

.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).