

# MATHEGAMI

## Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de

Juni 2006 /Dezember 2009

### Der Satz von Haga<sup>1</sup> – eine mögliche Ergänzung und eine Verallgemeinerung – Michael Schmitz

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Werner Mögling zum 80. Geburtstag gewidmet.

#### Zusammenfassung

Zentraler Inhalt dieses Beitrages ist der Satz von Haga, der aus dem Bereich des mathematischen Origami stammt und Verbindungen zur Ähnlichkeitslehre und zum Satz des Pythagoras erlaubt.

Aus dem Beweis des Satzes von Haga ergibt sich ein viertes Dreieck, das den Satz dann sinnvoll ergänzt. Darüber hinaus werden Verallgemeinerungen aufgezeigt, bei denen es möglich ist eine Strecke in  $n$  gleiche Teile zu teilen bzw. (bis auf Ähnlichkeit) alle pythagoreischen Dreiecke durch Falten zu bestimmen.

Vorschläge für weitere Probleme sollen den Leser zu eigenen Untersuchungen anregen.

## 1 Einleitung

Blättert man in Origamibüchern, etwa [2], [3] und [4], so kann man (als Mathematiklehrer) schnell die faszinierenden Möglichkeiten entdecken, die Origami auch für den Mathematikunterricht bieten kann. Man findet in diesen Büchern nicht nur schöne Produkte, sondern es kommen genauso Dreiecke, Quadrate, Rechtecke, regelmäßige Vielecke, Rhomben, reguläre Körper, ..., Kongruenz, Spiegelung, Strecken- und Flächenverhältnisse und vieles mehr vor. Hier kann man gut im Geometrieunterricht anknüpfen.

Natürlich soll auch betont werden, dass beim Falten von Papier ebenso exaktes Arbeiten, die Feinmotorik und das Vorstellungsvermögen unserer Schüler weiterentwickelt wird. Und es macht Spaß!

Diese Bedeutung des Papierfaltens für Bildung und Erziehung wurde in unserem Kulturkreis bereits von Fröbel (1782 - 1852) erkannt und genutzt. So waren u. a. Falten, Schneiden und Kleben von Papier fester Bestandteil in seiner 'Kindererziehung'.

Die Verbindung der alten japanischen Papierfaltkunst mit Mathematik wird *Origamics* genannt. In [1] wird auf eine Vielzahl von Anwendungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht hingewiesen.

Hier wird der Satz von Haga als Anwendung in der Ähnlichkeitslehre genutzt.

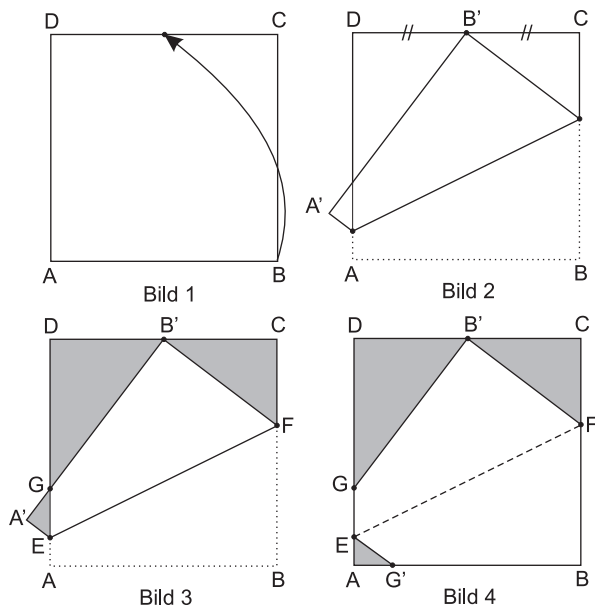
## 2 Der Satz von Haga

Wir falten ein quadratisches Blatt Papier  $ABCD$  (Bild 1) so, dass die Ecke  $B$  auf dem Mittelpunkt  $B'$  von  $CD$  zu liegen kommt (Bild 2).

<sup>1</sup>Erweiterte Fassung des gleichnamigen Beitrages von 2006.

Betrachten wir nun die drei entstandenen rechtwinkligen Dreiecke, die im Bild 3 schraffiert sind, so können wir feststellen, dass diese drei Dreiecke ähnlich zueinander sind und sich die Seiten in jedem Dreieck wie 3 : 4 : 5 verhalten.

Diese Tatsache wird in der Literatur als **Satz von Haga** bezeichnet und geht auf Haga Kazuo, einen japanischen Biologen zurück, der auch als Vater des mathematischen Papierfaltens gilt.

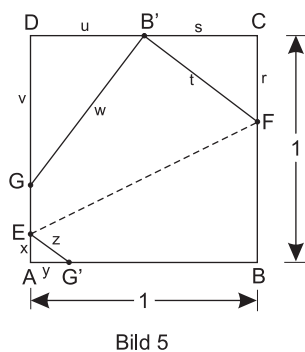


In [1] wird auf diesen Satz ebenfalls hingewiesen, der Beweis wird jedoch dem Leser überlassen. Wir wollen hier einen Beweis des Satzes angeben und dabei die Beziehungen zur Ähnlichkeitslehre und zum Satz des Pythagoras verdeutlichen. Zusätzlich wird sich über einen weiteren Gedankengang eine Ergänzung zum Satz von Haga ergeben. Zuerst zeigen wir jedoch, dass die drei Dreiecke zueinander ähnlich sind. Dazu bezeichnen wir die Faltnlinie, die beim Falten von  $B$  zum Mittelpunkt  $B'$  von  $CD$  entsteht mit  $EF$  und den Schnittpunkt von  $A'B'$  mit  $AD$  mit  $G$ . Es ist  $A'EG \sim DGB'$ , weil beide Dreiecke rechtwinklig sind und  $|\angle A'GE| = |\angle DGB'|$  (Scheitelwinkel) gilt.

Es ist  $DGB' \sim CBF'$ , weil beide Dreiecke rechtwinklig sind und  $|\angle CB'F| = |\angle DGB'|$  ist. Die letzte Winkelbeziehung ergibt sich daraus, dass auf Grund der durchgeführten Faltung  $|\angle GB'F| = 90$

ist. Damit ist aber  $|\angle CB'F| + |\angle GB'D| = 90$ . Da weiterhin im rechtwinkligen Dreieck  $DGB'$  auch  $|\angle DGB'| + |\angle GB'D| = 90$  ist, folgt die behauptete Winkelbeziehung.

Damit sind aber die drei betrachteten Dreiecke ähnlich zueinander. Nun zeigen wir, dass sich die Seiten in den Dreiecken wie 3 : 4 : 5 verhalten. Dazu nehmen wir an, dass das Ausgangsquadrat die Seitenlänge 1 hat und berechnen diesbezüglich die Längen der Dreiecksseiten, woraus sich dann die Behauptung ergibt.



Im Bild 4 ist das aufgefaltete Quadrat zu sehen, in dem die betrachtete Dreieck und die Faltnlinie  $EF$  eingezeichnet sind. Zur Berechnung der Seitenlängen der Dreiecke bezeichnen wir diese entsprechend dem Bild 5. Weil  $B'$  Mitte von  $DC$  ist, ist  $u = s = \frac{1}{2}$ .

Im Dreieck  $CB'F$  gilt mit dem Satz des Pythagoras  $t^2 = s^2 + r^2$  also  $t^2 = (\frac{1}{2})^2 + r^2$ .

Wegen der Faltung ist  $t = |BF| = 1 - r$ , womit  $(1 - r)^2 = \frac{1}{4} + r^2$ , also  $r = \frac{3}{8}$  folgt.

Damit wird aber  $t^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{8})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{64} = \frac{25}{64}$ , womit  $t = \frac{5}{8}$  folgt.

Damit ergibt sich aber sofort die Behauptung:  $r : s : t = \frac{3}{8} : \frac{1}{2} : \frac{5}{8} = \frac{3}{8} : \frac{4}{8} : \frac{5}{8} = 3 : 4 : 5$  für das Dreieck  $CB'F$ . Wegen der Ähnlichkeit zu

den anderen beiden Dreiecken gilt dieses Seitenverhältnis auch für diese, und der Satz von Haga ist bewiesen.

Zur Vervollständigung berechnen wir noch die Seitenlängen der anderen beiden Dreiecke.

Im Dreieck  $DGB'$  ist  $u = \frac{1}{2}$  und mit  $u : v : w = 3 : 4 : 5$  folgt über  $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ , also  $v = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$  und  $\frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ , also  $w = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$ .

Damit ist  $u = \frac{1}{2}, v = \frac{2}{3}$  und  $w = \frac{5}{6}$ .

Zur Berechnung der Seitenlängen im Dreieck  $AG'E$  bedenken wir, dass wegen der Faltung  $|G'B| =$

$|GB'| = w = \frac{5}{6}$  ist. Folglich ist  $y = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ .

Weil  $\frac{1}{6} = \frac{4}{5}$  gilt, ergibt sich  $z = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{24}$  und weil  $\frac{x}{1} = \frac{3}{4}$  gilt, ergibt sich  $x = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$ , also finden wir  $x = \frac{1}{8}$ ,  $y = \frac{1}{6}$  und  $z = \frac{5}{24}$ .

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich mit  $v = \frac{2}{3}$ , dass  $|AG| = \frac{1}{3}$  ist. Damit erhalten wir die **Folgerung 1**: Der Mittelpunkt von  $DG$  und  $G$  (Bild 5) drittelt die Quadratseite  $AD$ .

Die Faltung beim Satz von Haga ermöglicht es uns also sehr leicht, eine Seite des Ausgangsquadrates zu dritteln.

### 3 Eine mögliche Ergänzung

Nun betrachten wir noch einmal die drei Dreiecke, die entstehen, wenn  $B$  auf den Mittelpunkt von  $CD$  gefaltet wird. Wir berechnen die Ähnlichkeitsfaktoren  $\lambda_{AC}$  und  $\lambda_{AD}$  vom kleinen Dreieck  $EAG'$  bezüglich  $FCB'$  und bezüglich  $B'DG$ .

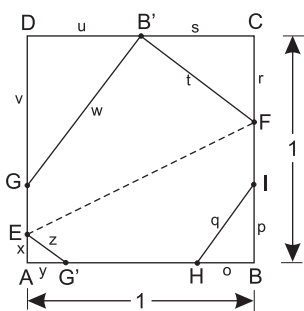


Bild 6

Es gilt  $\lambda_{AC} = \frac{t}{z} = \frac{\frac{5}{8}}{\frac{5}{24}} = \frac{3}{1} = 3$  und

$\lambda_{AD} = \frac{w}{z} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{24}} = \frac{4}{1} = 4$ .

Dieses Ergebnis wirft die Frage nach einem vierten Dreieck auf, das bezüglich  $EAG'$  den Ähnlichkeitsfaktor 2 hat, noch dazu, dass in der Ecke  $B$  des Ausgangsquadrates noch kein Dreieck liegt. Ein solches Dreieck lässt sich jedoch leicht in die Figur (Bild 6) einzeichnen.

Wir wählen  $H$  auf  $AB$  so, dass  $|HB| = o = 2 \cdot x = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$  und  $I$  auf  $BC$  so, dass  $|IB| = p = 2 \cdot y = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$  ist. Dann ist das Dreieck  $HBI$  zum Dreieck  $EAG'$  ähnlich und der Ähnlichkeitsfaktor beträgt 2. Weiterhin ist  $|HI| = q = 2 \cdot z = 2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{12}$ . Die Seitenlängen dieses

Dreiecks betragen damit  $o = \frac{1}{4}$ ,  $p = \frac{1}{3}$  und  $q = \frac{5}{12}$ .

Als nächstes fragen wir nach einer möglichen Faltung, die dieses vierte Dreieck  $HBI$  erzeugt.

Experimentieren wir mit dem Falten des Quadrates, so können wir dieses Quadrat so falten, dass die Kanten  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  und  $AB$  jeweils durch  $I$  und  $H$  gehen, wie es in den Bildern 7 – 10 gezeigt ist.

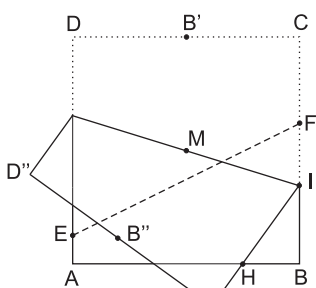


Bild 7

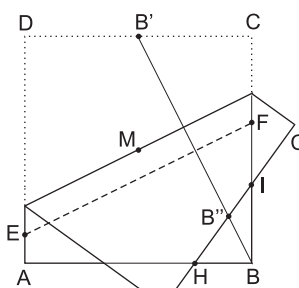


Bild 8

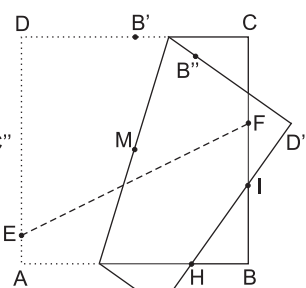


Bild 9

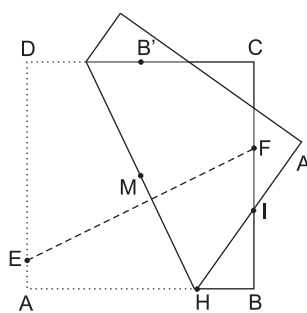
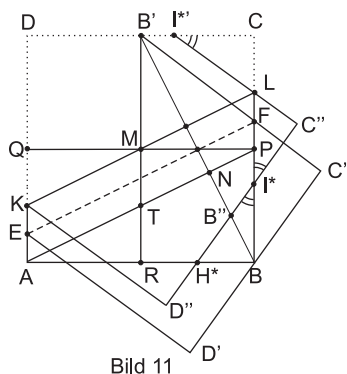


Bild 10

Beim praktischen Ausführen dieser Faltungen bemerken wir, dass alle vier Faltnissen durch den Mittelpunkt  $M$  des Quadrates gehen. Darüberhinaus fällt auf, dass bei der Faltung von  $DC$  durch  $H$  und  $I$  die zugehörige Faltnisse parallel zu  $EF$  ist (Bild 8), wobei  $B'$  auf der Verbindungslinie von  $BB'$  zu liegen kommt. Damit passt diese Faltung besonders gut zur Faltung des Satzes von Haga.

Also: Wir falten das Quadrat  $ABCD$  so, dass der Mittelpunkt von  $CD$  auf der Verbindung von  $BB'$  zu liegen kommt und dabei die Faltnisse durch den Mittelpunkt  $M$  des Quadrates geht. Die umgefaltete Quadratseite  $C''D''$  bestimmt auf  $AB$  den Punkt  $H^*$  und auf  $BC$  den Punkt  $I^*$ . Mit  $KL$  bezeichnen

wir die durch  $M$  gehende Faltkante und  $B''$  ist das Bild von  $B'$  auf  $BB'$  (Bild 11).



Wir müssen nun zeigen, dass  $H^*$  mit  $H$  und  $I^*$  mit  $I$  übereinstimmt. Dazu weisen wir nach, dass  $H^*BI^*$  zu  $EAG'$  ähnlich ist und bezüglich dieses Dreiecks den Ähnlichkeitsfaktor  $\lambda_{AB} = 2$  hat.

Wir zeigen zuerst, dass die beiden Faltkanten  $EF$  und  $KL$  parallel zueinander sind. Bei der ersten Faltung wird  $B'$  auf  $B$  gefaltet. Folglich ist die Faltkante  $EF$  senkrecht zu  $BB'$ . Bei der zweiten Faltung wird  $B'$  auf einen Punkt von  $BB'$  gefaltet. Also ist die Faltkante  $KL$  senkrecht zu  $BB'$ , woraus sich die Parallelität von  $EF$  und  $KL$  ergibt. Betrachten wir nun die Faltung mit der Faltkante  $KL$ , so erkennen wir, dass die beiden Dreiecke  $H^*BI^*$  und  $I^*LC''$  ähnlich zueinander sind, da beide jeweils einen rechten Winkel haben und im Winkel bei  $I^*$  (Scheitelwinkel) übereinstimmen. Betrachten wir zusätzlich die Faltung mit der Faltkante

$EF$ , so erkennen wir die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $I^*C''L$  und  $BC'F$  aufgrund der Parallelität entsprechender Seiten. Weil das Dreieck  $BC'F$  dem Dreieck  $B'CF$  vom Satz von Haga entspricht, ist  $H^*BI^* \sim B'CF$  und damit auch  $H^*BI^* \sim EAG'$ . Demzufolge verhalten sich auch in Dreieck  $H^*BI^*$  die Seitenlängen wie  $3 : 4 : 5$ .

Wir bestimmen nun die Seitenlängen des Dreiecks  $H^*BI^*$ .  $LCT'^*$  ist das Dreieck, das aus  $LC''I^*$  entsteht nachdem man die Faltung um  $KL$  rückgängig gemacht hat.

Wir zeigen zuerst, dass  $|LC| = \frac{1}{4}$  ist. Um dies einzusehen verbinden wir  $A$  mit dem Mittelpunkt  $P$  von  $BC$  und betrachten den Schnittpunkt  $N$  mit  $BB'$ . Die beiden Strecken  $AP$  und  $BB'$  stehen senkrecht aufeinander, da die beiden Rechtecke  $QABP$  (mit der Diagonalen  $AP$ ) und  $RBCB'$  (mit der zugehörigen Diagonalen  $BB'$ ) durch eine Drehung um  $M$  mit dem Drehwinkel  $90$  aufeinander abgebildet werden können.

Damit ist aber  $AP \parallel KL$ . Weil  $|MT| = \frac{1}{4}$  (Strahlensatz mit Zentrum  $P$ ), ist auch  $|PL| = \frac{1}{4}$  und damit  $|CL| = \frac{1}{4}$ . Weil im Dreieck  $LCT'^*$  das Seitenverhältnis  $3 : 4 : 5$  beträgt, ergibt sich  $\frac{|CL|}{|CL'^*|} = \frac{3}{4}$ , also  $|CL'^*| = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$  und  $\frac{|CT'^*|}{|I'^*L|} = \frac{4}{5}$ , woraus sich  $|I'^*L| = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$  ergibt. Weil  $|LI'^*| = |LI^*|$  ist, ergibt sich  $|BI^*| = 1 - |LC| - |LI^*| = 1 - \frac{1}{4} - \frac{5}{12} = \frac{12}{12} - \frac{3}{12} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$  und damit auch  $|BH^*| = \frac{1}{3}$  und  $|H^*I^*| = \frac{5}{12}$ . Damit sind aber die Seiten von  $H^*I^*B$  doppelt so lang wie die von  $EAG'$  und der Ähnlichkeitsfaktor  $\lambda_{AB}$  von  $EAG'$  zu  $H^*BI^*$  beträgt  $2$ .

Damit ist das Dreieck  $H^*BI^*$  tatsächlich ein Dreieck, das sich in der vierten Quadraturecke sinnvoll in die drei Dreiecke des Satzes von Haga einordnet.

**Folgerung 2:** Faltet man den Mittelpunkt  $B'$  von  $CD$  so auf die Verbindungslinie  $BB'$ , dass die Faltnie durch den Mittelpunkt  $M$  des Quadrates verläuft, so entsteht ein viertes Dreieck, das zu den bereits vorhandenen Dreiecken des Satzes von Haga ähnlich ist und in Bezug auf das kleinste Dreieck den Ähnlichkeitsfaktor  $2$  hat.

## 4 Eine Verallgemeinerung

Der Satz von Haga hatte seinen Ausgangspunkt in der Faltung von  $B$  auf den Mittelpunkt  $B'$  von  $CD$  des Quadrates  $ABCD$ . Nun wollen wir die Bedingung, dass  $B'$  Mittelpunkt von  $CD$  ist, fallen lassen.

Im Bild 12 wird die Ecke  $B$  auf einen beliebigen Punkt  $B'$  von  $CD$  gefaltet. Auch hier entstehen drei Dreiecke, die in diesem Bild schraffiert sind. Mit den selben Überlegungen wie beim Satz von Haga erkennen wir, dass diese drei Dreiecke ebenfalls untereinander ähnlich sind.

Um die Ähnlichkeitsfaktoren der drei Dreiecke untereinander zu bestimmen, berechnen wir wieder die Längen der Dreiecksseiten unter der Voraussetzung, dass  $ABCD$  ein Quadrat mit der Seitenlänge  $1$  ist. Mit den Bezeichnungen aus Bild 13 ist  $|CB'| = s$  mit  $0 < s < 1$ .

Im Dreieck  $FCB'$  gilt der Satz des Pythagoras:  $t^2 = r^2 + s^2$ .

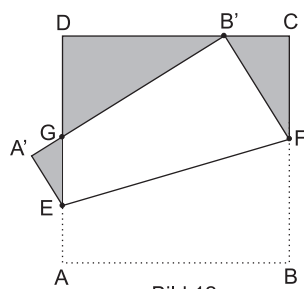


Bild 12

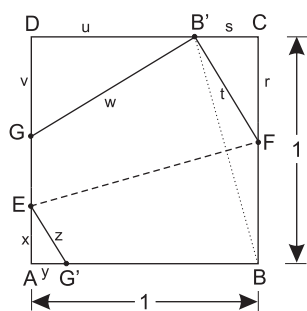


Bild 13

Auf Grund der Faltung ist aber  $|FB'| = |FB|$ , woraus sich mit  $|FB| = 1 - r$  nun  $(1 - r)^2 = r^2 + s^2$  ergibt und  $r = \frac{1-s^2}{2}$  folgt. Setzen wir dieses Ergebnis in  $t^2 = r^2 + s^2$  ein, so erhalten wir  $t^2 = \left(\frac{1-s^2}{2}\right)^2 + s^2 = \frac{1+2s^2+s^4}{4} = \left(\frac{1+s^2}{2}\right)^2$  und schließlich  $t = \frac{1+s^2}{2}$ . Damit haben wir die Längen der Seiten des Dreiecks  $FCB'$  (in Abhängigkeit von  $s$ ) berechnet:  $s = s$ ,  $r = \frac{1-s^2}{2}$  und  $t = \frac{1+s^2}{2}$ .

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke erhalten wir für das Dreieck  $B'DG$  jetzt  $\frac{u}{v} = \frac{r}{s}$ , woraus mit  $u = 1 - s$  nun  $v = \frac{(1-s) \cdot s}{r} = \frac{(1-s) \cdot s}{\frac{1-s^2}{2}} = \frac{2s}{1+s}$  folgt.

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras erhalten wir weiter  $w^2 = u^2 + v^2 = (1 - s)^2 + \left(\frac{2s}{1+s}\right)^2 = \frac{(1+s^2)^2}{(1+s)^2}$ , woraus  $w = \frac{1+s^2}{1+s}$  folgt.

Damit sind auch die Seitenlängen des Dreiecks  $B'DG$  (in Abhängigkeit von  $s$ ) berechnet:  $u = 1 - s$ ,  $v = \frac{2s}{1+s}$  und  $w = \frac{1+s^2}{1+s}$ .

Im Dreieck  $EAG'$  folgt mit  $|BG'| = |B'G|$  sofort  $y = 1 - w = 1 - \frac{1+s^2}{1+s} = \frac{(1-s) \cdot s}{1+s}$ . Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt  $\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$ , woraus  $x = \frac{y \cdot r}{s} = \frac{\frac{(1-s) \cdot s}{1+s} \cdot \frac{1-s^2}{2}}{s} = \frac{(1-s) \cdot (1-s^2)}{2 \cdot (1+s)} = \frac{(1-s)^2}{2}$  folgt. Ebenso gilt  $\frac{z}{x} = \frac{t}{r}$ , womit  $z = \frac{x \cdot t}{r} = \frac{(1-s) \cdot (1+s^2)}{2 \cdot (1+s)}$  sich ergibt.

Damit haben die Seiten im Dreieck  $EAG'$  (in Abhängigkeit von  $s$ ) die folgenden Längen:  $x = \frac{(1-s)^2}{2}$ ,  $y = \frac{(1-s) \cdot s}{1+s}$  und  $z = \frac{(1-s) \cdot (1+s^2)}{2 \cdot (1+s)}$ .

Nun berechnen wir die Seitenverhältnisse im Dreieck  $FCB'$ . Es gilt:  $r : s : t = \frac{1-s^2}{2} : s : \frac{1+s^2}{2} = (1 - s^2) : 2s : (1 + s^2)$ .

Dieses Seitenverhältnis gilt natürlich auf Grund der Ähnlichkeit auch in den anderen beiden Dreiecken.

Betrachten wir nun einen Spezialfall, in dem  $s = \frac{m}{n}$ , mit  $m, n \in \mathbb{N}$  und  $0 < m < n$  ist. Wir teilen damit die Strecke  $CD$  in  $n$  gleiche Teile und legen  $B'$  in den  $m$ -ten Teilpunkt von  $C$  aus. Für diesen Fall gilt  $r : s : t = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right) : 2 \frac{m}{n} : \left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right) = (n^2 - m^2) : 2mn : (n^2 + m^2)$ . Weil  $n^2 - m^2$ ,  $2mn$  und  $n^2 + m^2$  natürliche Zahlen sind, sind die zugehörigen Dreiecke pythagoreische Dreiecke.

Lässt sich  $s$  nicht als Bruch  $\frac{m}{n}$  darstellen,  $s$  ist also irrational, dann sind die zugehörigen Dreiecke nicht pythagoreisch. Nehmen wir nämlich im Gegenteil an, dass ein pythagoreisches Dreieck entsteht obwohl  $s$  irrational ist. Dann entspricht  $r : s : t$  einem Verhältnis  $r' : s' : t'$  mit natürlichen Zahlen. Es ist dann  $\frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}$ , also  $r = \frac{r'}{s'} \cdot s$ , sowie  $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$ , also  $t = \frac{t'}{s'} \cdot s$ . Nun ist aber aufgrund der Faltung  $r + t = 1$ , also  $\frac{r'}{s'} \cdot s + \frac{t'}{s'} \cdot s = 1$ , woraus  $\frac{r'+t'}{s'} \cdot s = 1$  folgt. Schließlich erhalten wir  $s = \frac{s'}{r'+t'}$ . Das bedeutet aber, dass  $s$  rational ist, im Gegensatz zur Voraussetzung. Folglich sind alle Dreiecke, die bei der Faltung entstehen und eine nicht rationale Seitenlänge  $s$  haben, keine pythagoreischen Dreiecke. Weiterhin ergibt sich, dass durch passende Wahl von  $B'$  auf  $CD$  – bis auf Ähnlichkeit – jedes pythagoreische Dreieck erzeugt werden kann.

**Folgerung:** Wird die Ecke  $B$  des Quadrates  $ABCD$  so auf die Seite  $CD$  gefaltet, dass  $s = \frac{m}{n}$  ist, so entstehen drei zueinander ähnliche pythagoreische Dreiecke.

Zur Vervollständigung bestimmen wir nun noch die beiden Ähnlichkeitsfaktoren  $\lambda_{AC}$  und  $\lambda_{AD}$  vom kleinen Dreieck  $EAG'$  bezüglich  $FCB'$  und bezüglich  $B'DG$ .

Es gilt  $\lambda_{AC} = \frac{s}{y} = \frac{1+s}{1-s}$  und  $\lambda_{AD} = \frac{v}{y} = \frac{2}{1-s}$ .

Im Spezialfall  $s = \frac{m}{n}$  erhalten wir:  $\lambda_{AC} = \frac{n+m}{n-m}$  und  $\lambda_{AD} = \frac{2n}{n-m}$ .

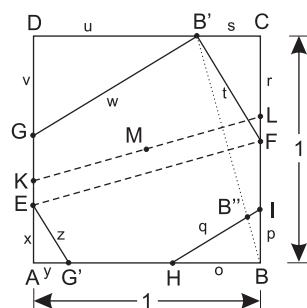


Bild 14

Als nächstes falten wir, entsprechend unserer Ergänzung zum Satz von Haga, den Punkt  $B'$  so auf die Verbindungslinie von  $BB'$ , dass die Faltnie durch den Mittelpunkt  $M$  des Quadrates geht (Bild 14). Auch hier entsteht in der Ecke  $B$  des Quadrates ein viertes Dreieck  $HBI$ .

Wir bezeichnen die Faltnie entsprechend Bild 14 wieder mit  $KL$ . Diese Faltnie ist parallel zur vorhergehenden Faltnie  $EF$ , womit wegen  $AB \parallel CD$  auch  $HI \parallel B'G$  folgt. Damit ist aber das Dreieck  $HBI$  ähnlich zum Dreieck  $B'DG$ , und dieses Dreieck ordnet sich in die Verallgemeinerung des Satzes von Haga ein.

Um auch noch den Ähnlichkeitsfaktor  $\lambda_{AB} = \frac{p}{y}$  des Dreiecks  $EAG'$  bezüglich des Dreiecks  $HBI$  zu bestimmen, berechnen wir die Seitenlänge  $p$  von  $HBI$ .

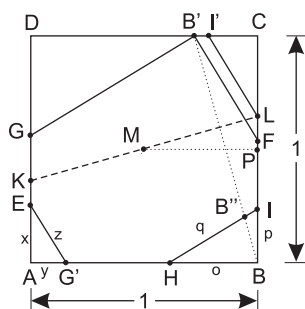


Bild 15

Dazu fällen wir das Lot von  $M$  auf  $BC$  und erhalten dort den Lotfußpunkt  $P$  (Bild 15). Dann ist  $BCB' \sim MPL$  weil beide Dreiecke rechtwinklig sind und in den Winkeln  $\sphericalangle CBB'$  und  $\sphericalangle PML$  übereinstimmen. Weil  $|BC| = 1$  und  $|PM| = \frac{1}{2}$  ist, ist  $|PL| = \frac{s}{2}$ . Folglich ist  $|LC| = \frac{1}{2} - \frac{s}{2} = \frac{1-s}{2}$ .

Nun spiegeln wir den Punkt  $I$  an  $KL$  und erhalten  $I'$  auf  $CD$ , wobei  $LI' \parallel FB'$  ist. Daher sind die beiden Dreiecke  $LCI'$  und  $FCB'$  ähnlich zueinander und es gilt:  $\frac{|FC|}{|FB'|} = \frac{|LC|}{|LI'|}$ , also  $\frac{r}{t} = \frac{\frac{1-s}{2}}{\frac{1-s}{2} \cdot t} = \frac{1-s}{1-s^2} = \frac{1+s^2}{2(1+s)}$ .

Weil  $|LI| = |LI'|$  ist, ist  $p = 1 - |LI| - |LC| = 1 - \frac{1+s^2}{2(1+s)} - \frac{1-s}{2} = \frac{s}{1+s}$ .

Nun können wir  $\lambda_{AB}$  berechnen:  $\lambda_{AB} = \frac{p}{y} = \frac{\frac{s}{1+s}}{\frac{(1-s) \cdot s}{1+s}} = \frac{1}{1-s}$ .

Damit sind die drei Ähnlichkeitsfaktoren  $\lambda_{AB} = \frac{1}{1-s}$ ,  $\lambda_{AC} = \frac{1+s}{1-s}$  und  $\lambda_{AD} = \frac{2}{1-s}$  bestimmt. Auch unter dieser Betrachtungsweise ordnet sich das vierte Dreieck gut ein.

Im Spezialfall  $s = \frac{m}{n}$  gilt:  $\lambda_{AB} = \frac{n}{n-m}$ ,  $\lambda_{AC} = \frac{n+m}{n-m}$  und  $\lambda_{AD} = \frac{2n}{n-m}$ .

Abschließend betrachten wir noch den Punkt  $G$  auf  $AD$ .

Wir hatten bereits  $|DG| = v = \frac{2s}{1+s}$  berechnet. Im Spezialfall  $s = \frac{m}{n}$  ergibt sich  $|DG| = \frac{2m}{n+m}$ . Setzen wir im Besonderen  $m = 1$ , so wird aus  $s = \frac{1}{n}$  nun  $|DG| = \frac{2}{n+1}$ .

**Folgerung:** Ist  $B'$  der erste Punkt einer  $n$ -Teilung der Quadratseite  $CD$ , dann ist der Mittelpunkt von  $DG$  der erste Punkt einer  $(n+1)$ -Teilung der Quadratseite  $DA$ .

Auch dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Folgerung zum Satz von Haga.

Beginnen wir mit der Halbierung von  $CD$  und falten  $B$  auf diesen Mittelpunkt (Satz von Haga), so drittelt der Mittelpunkt von  $DG$  die Seite  $DA$ . Falten wir nun  $C$  auf diesen Punkt, so entsteht auf  $AB$  eine Viertelung dieser Quadratseite. Nun falten wir  $D$  auf den entsprechenden Punkt von  $AB$ , so entsteht auf  $BC$  ein Punkt, der diese Quadratseite fünftelt. Setzen wir dieses Verfahren sukzessiv fort, so lässt sich eine Quadratseite in  $n$  gleiche Teile teilen.

## 5 Kreise

Wir falten das Quadrat  $ABCD$  so, dass  $B$  auf dem Mittelpunkt von  $CD$  zu liegen kommt, wie es die Voraussetzung für den Satz von Haga ist.

Nun zeichnen wir in die drei entstandenen Dreiecke jeweils die Inkreise, wie es im Bild 16 gezeigt ist. Weil die Dreiecke  $EGA'$ ,  $B'FC$  und  $GB'D$  ähnlich zueinander

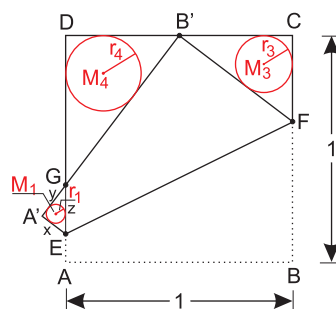


Bild 16

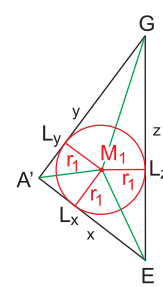


Bild 17



sind und von  $EGA'$  die Ähnlichkeitsfaktoren zu den beiden anderen Dreiecken 3 bzw. 4 sind, folgt für die Radien der Inkreise  $r_3 = 3 \cdot r_1$  und  $r_4 = 4 \cdot r_1$ .

Wir berechnen nun  $r_1$ .

Unter der Voraussetzung, dass  $|AB| = 1$  ist, haben wir bereits  $|EA'| = x = \frac{1}{8}$ ,  $|A'G| = y = \frac{1}{6}$  und  $|GE| = z = \frac{5}{24}$  berechnet. Im Bild 17 ist die Situation vergrößert dargestellt. Dort haben wir auch  $E$ ,  $G$  und  $A'$  mit  $M_1$  verbunden und erhalten damit den Flächeninhalt  $|EGA'| = \frac{1}{2}z \cdot r_1 + \frac{1}{2}y \cdot r_1 + \frac{1}{2}x \cdot r_1 = \frac{1}{2}r_1 \cdot (x + y + z)$ .

Andererseits ist  $|EGA'| = \frac{1}{2}x \cdot y$ , woraus insgesamt  $\frac{1}{2}r_1 \cdot (x + y + z) = \frac{1}{2}x \cdot y$ , also  $r_1 = \frac{x \cdot y}{x + y + z}$  folgt.

Damit erhalten wir  $r_1 = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{5}{24}} = \frac{1}{24}$ , woraus sich  $r_3 = 3 \cdot r_1 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} = x$  und  $r_4 = 4 \cdot r_1 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = y$  ergibt.

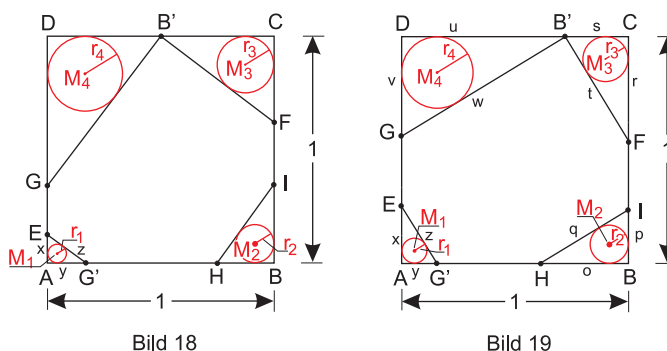
Diese Ergebnisse bedeuten, dass die Inkreisradien  $r_3$  und  $r_4$  mit den Katheten des kleinen Dreiecks übereinstimmen.

Bezeichnen wir nun noch die Fußpunkte der Lote vom  $M_1$  auf die Dreiecksseiten (Bild 17) mit  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$ , dann ist  $|A'L_x| = |A'L_y| = r_1$  und folglich drittelt  $L_x$  die Seite  $A'E$  und  $L_y$  viertelt die Seite  $GA'$ .  $L_z$  teilt folglich die Seite  $EG$  im Verhältnis 2 : 3.

Da  $EGA'$  ein pythagoreisches Dreieck mit  $|EA'| : |A'G| : |GE| = 3 : 4 : 5$  ist, ergibt sich auch, dass der Inkreisradius eines solchen Dreiecks gerade die Einheit bezogen auf die Seitenlängen des Dreiecks  $EAG'$  ist.

Nun betrachten wir in der Ecke  $B$  noch das vierte Dreieck, das nach Abschnitt 2 konstruiert wurde und das bezüglich  $EGA'$  den Ähnlichkeitsfaktor 2 hat, wie es im Bild 18 dargestellt ist. Dann ist  $r_2 = 2 \cdot r_1 = \frac{1}{12}$ . Damit ist aber  $r_2$  die Hälfte von  $y$  und auch  $r_2$  findet sich im Dreieck  $EGA'$  wieder. Insgesamt erhalten wir:  $r_1 = \frac{1}{4}|A'G|$ ,  $r_2 = \frac{1}{2}|A'G|$ ,  $r_3 = |A'E|$  und  $r_4 = |A'G|$ .

Diese Eigenschaft gilt nicht mehr im vollen Umfang, wenn wir  $B$  auf einen beliebigen Punkt von  $CD$  falten und außerdem das vierte Dreieck in der Ecke  $B$  entsprechend konstruieren. Diese Situation ist im Bild 19 dargestellt.



Zuerst berechnen wir  $r_1$ , den Radius des Inkreises des Dreiecks  $WAG'$  und benutzen dazu die im dritten Abschnitt berechneten Werte für die Seitenlängen  $x$ ,  $y$  und  $z$ .

$$\text{Damit erhalten wir } r_1 = \frac{x \cdot y}{x + y + z} = \frac{\frac{(1-s)^2}{2} \cdot \frac{(1-s) \cdot s}{1+s}}{\frac{(1-s)^2}{2} + \frac{(1-s) \cdot s}{1+s} + \frac{(1-s) \cdot (1+s^2)}{2 \cdot (1+s)}} = \frac{s \cdot (1-s)^2}{2 \cdot (1+s)}.$$

Zur Bestimmung der Inkreisradien  $r_2$ ,  $r_3$  und  $r_4$  benutzen wir die, ebenfalls im dritten Abschnitt berechneten, Ähnlichkeitsfaktoren  $\lambda_{AB} = \frac{1}{1-s}$ ,  $\lambda_{AC} = \frac{1+s}{1-s}$  und  $\lambda_{AD} = \frac{2}{1-s}$  vom Dreieck  $WAG'$  zu den Dreiecken  $HBI$ ,  $FCB'$  und  $B'DG$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} r_2 &= \lambda_{AB} \cdot r_1 = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{s \cdot (1-s)^2}{2 \cdot (1+s)} = \frac{s \cdot (1-s)}{2 \cdot (1+s)}, \\ r_3 &= \lambda_{AC} \cdot r_1 = \frac{1+s}{1-s} \cdot \frac{s \cdot (1-s)^2}{2 \cdot (1+s)} = \frac{s \cdot (1-s)}{2}, \\ r_4 &= \lambda_{AD} \cdot r_1 = \frac{2}{1-s} \cdot \frac{s \cdot (1-s)^2}{2 \cdot (1+s)} = \frac{s \cdot (1-s)}{1+s}. \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass  $r_4 = y$  und  $r_2 = \frac{1}{2}y$  aber  $r_3 = \frac{s}{1-s}x$  bzw.  $r_3 = \frac{1+s}{2}y$  ist.

**Folgerung:** Faltet man die Ecke  $B$  eines Quadrates  $ABCD$  auf einen beliebigen Punkt von  $CD$  (Bild 19), so ist die Länge der Dreiecksseite  $|AG'| = y$  gleich dem Inkreisradius  $r_4$  des Dreiecks in der Ecke  $D$  und gleich dem doppelten Inkreisradius  $r_2$  des Dreiecks in der Ecke  $B$ .

Die Länge der Dreiecksseite  $|AE| = x$  ist nur dann gleich dem Inkreisradius  $r_3$  des Dreiecks in der Ecke  $C$ , wenn  $B$  auf den Mittelpunkt von  $CD$  gefaltet wird.

## 6 Weitere Fragen

Zum Abschluss soll noch auf weitere Problemstellungen im Zusammenhang mit dem Satz von Haga hingewiesen werden.

Bezeichnen wir wieder mit  $B'$  einen Punkt von  $CD$  und falten  $B'$  so auf die Verbindungslinie  $BB'$ , dass die Faltlinie durch den Mittelpunkt  $M$  des Quadrates geht. Dann entstehen, wie im Bild 20 gezeigt ist, vier zueinander ähnliche Dreiecke. Bei welcher Lage von  $B'$  auf  $CD$  sind diese Dreiecke untereinander sogar kongruent?

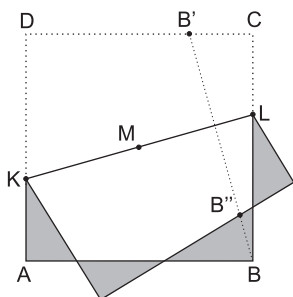


Bild 20

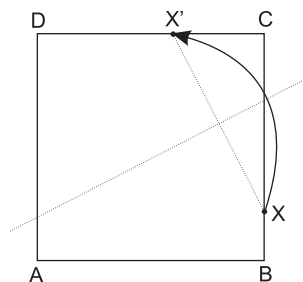


Bild 21a

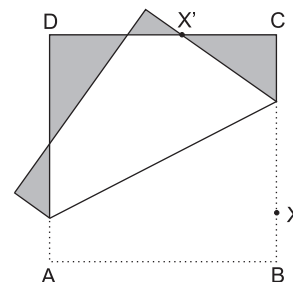


Bild 21b

Bestimmen wir auf  $BC$  einen Punkt  $X$  und auf  $CD$  einen Punkt  $X'$  ( $|DX'| \neq |BX|$ ), wie es im Bild 21a gezeigt ist und falten anschließend  $X$  auf  $X'$ . Auch dabei entstehen vier zueinander ähnliche Dreiecke, wie es im Bild 21b zu sehen ist. Daraus ergeben sich die Fragen: Lassen sich auf diese Weise auch vier zueinander kongruente Dreiecke erzeugen? Unter welchen Bedingungen entstehen pythagoreische Dreiecke?

Eine weitere Möglichkeit zur Verallgemeinerung des Satzes von Haga besteht z.B. darin, dass das Quadrat durch ein Rechteck ersetzt wird.

In den Bildern 22 und 23a bis 23c sind solche Varianten gezeigt, wobei bei Bedarf Seiten verlängert werden.

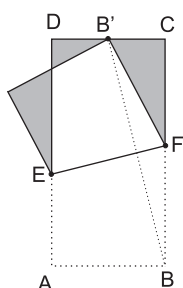


Bild 22

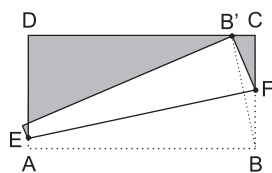


Bild 23a

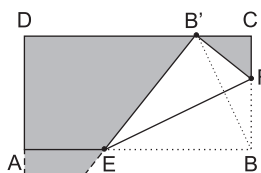


Bild 23b

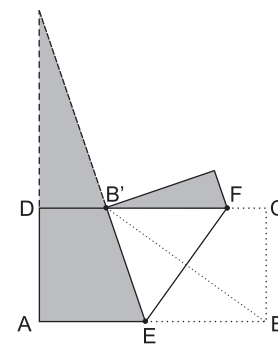
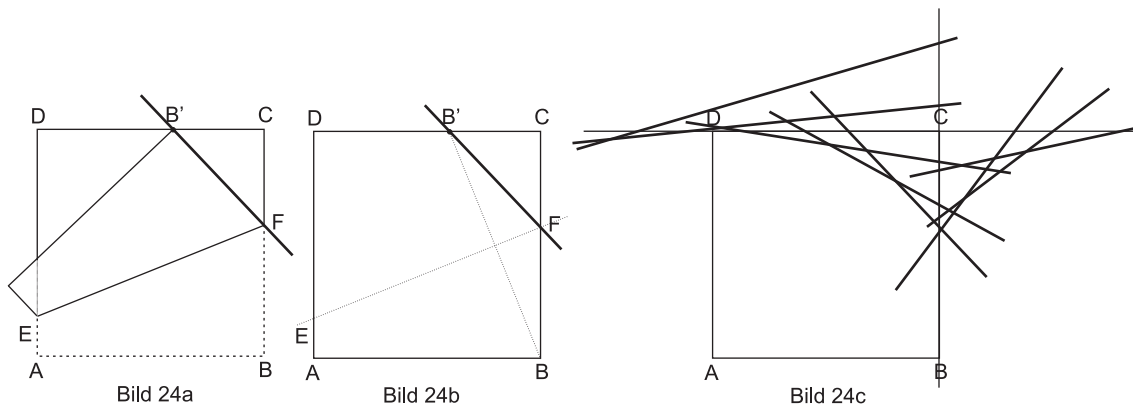


Bild 23c

Zum Abschluss sei noch auf eine weitere Fragestellung hingewiesen, die sich auf die quadratische Ausgangsfigur  $ABCD$  bezieht: Wir falten  $B$  auf einen beliebigen Punkt  $B'$  von  $CD$  (Bild 24a) und erhalten die Faltlinie  $EF$ , wobei  $F$  auf  $BC$  liegt. Nun markieren wir die gefaltete Kante  $FB'$ . Macht man dies für mehrere Punkte  $B'$  von  $CD$ , so scheinen die markierten Linien eine Kurve einzuhüllen.





Um dies näher zu beschreiben, ersetzen wir die Faltkonstruktion durch eine geometrische Konstruktion und verallgemeinern (Bild 24b):  $B'$  ist ein beliebiger Punkt der Geraden durch  $C$  und  $D$ . Wir zeichnen die Mittelsenkrechte zu  $BB'$ , die die Gerade durch  $B$  und  $C$  im Punkt  $F$  schneidet. Die Gerade durch  $F$  und  $B'$  entspricht der markierten Faltkante aus Bild 24a. Diese Konstruktion ist für jeden Punkt  $B'$  von  $g(CD)$  möglich. Im Bild 24c sind mehrere solche zugehörige Geraden eingezeichnet, die eine zu  $g(BC)$  Kurve einhüllen. Eine (analytische) Beschreibung dieser Kurve ist gesucht. Dabei sollte man vermutlich  $B' \neq C$  fordern.

## Literatur

- [1] Henn, H.-W.: *Origamics – Papierfalten mit mathematischen Spürsinn*. In: Die neue Schulpraxis, Heft 6/7, 2003, S. 49-53.
- [2] Kasahara, K.: *Origami figürlich und geometrisch*. Augustus-Verlag, München, 2000.
- [3] Kasahara, K.: *Origami ohne Grenzen*. Knauer, 2004.
- [4] Mitchell, D.: *Mathematical Origami*. Tarquin, 1997.

## Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite [www.mathegami.de](http://www.mathegami.de) findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail ([michael.schmitz@uni-jena.de](mailto:michael.schmitz@uni-jena.de)) oder beteiligen Sie sich an der oben genannten Internetseite.