MATHEGAMI
**Mathematik - Origami - Unterricht**

www.mathegami.de September 2015

# Hut, Becher oder Geschicklichkeitsspiel – geometrische Betrachtungen –

Michael Schmitz

In [3] wird das Falten eines Fezes beschrieben. Ein Fez ist eine früher im Orient und auf dem Balkan weit verbreitete Kopfbedeckung in der Form eines Kegelstumpfes aus rotem Filz mit flachem Deckel und mit meist schwarzer, blauer oder goldener Quaste (vgl. [4]).

Zum Falten dieses Hutes beginnen wir mit einem quadratischen Faltpapier $ABCD$, das entlang der Diagonalen $AC$ zu einem gleichschenklig rechtwinkligen Dreieck gefaltet wird (Abb. 1a).

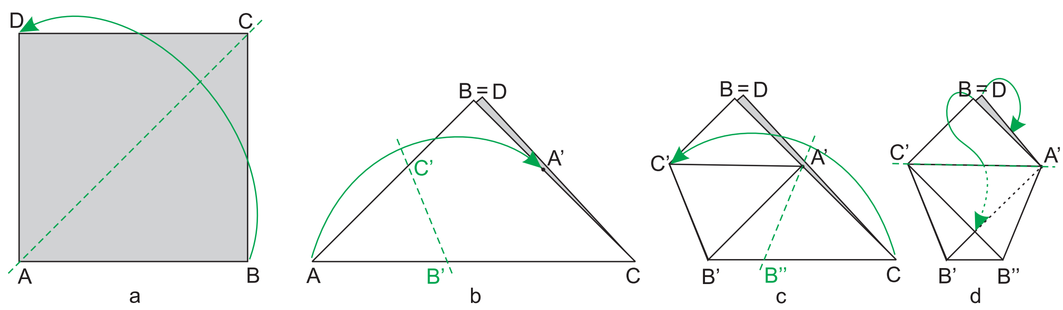


Abbildung 1: Der Faltprozess

Dann wird $A$ so auf $BC$ gefaltet, dass die umgefaltete Kante parallel zu $AC$ ist. Bezeichnen wir mit $A'$ das Bild von $A$ auf $BC$, dann ist $B'C'$ die zugehörige Faltlinie. Es soll dann $C'A'||B'C$ gelten (Abb. 1b).

Nun wird $C$ auf $C'$ gefaltet (Abb. 1c). Die zugehörige Faltlinie scheint durch $A'$ zu gehen und schneidet $AC$ in $B''$. Anschließend wird $D$ nach hinten und $B$ nach vorn entlang $C'A'$ gefaltet, wobei die Ecke $B$ in die Tasche des Dreiecks $A'C'B''$ geschoben wird (Abb. 1d). Haben wir $A'$ auf $CB$ gut gewählt, dann passt alles gut zusammen.

Um den Hut zu komplettieren benötigen wir noch eine Quaste. Diese können wir aus drei Papierrechtecken anfertigen. Die Breite dieser Rechtecke sollte etwa die Hälfte der Länge der Strecke $B'B''$ (Abb. 1d), ihre Länge etwa der Höhe des Hutes (also dem Abstand von $B'B''$ zu $C'A'$) betragen. Diese drei Rechtecke werden übereinander gelegt und an einer kurzen Seite miteinander verklebt. Anschließend wird der gefaltete Hut an der Strecke $B'B''$ soweit aufgeschnitten, dass die zusammengeklebten Papierrechtecke eingeschoben werden können. Sie werden nun im Inneren des Hutes an eine Seite (ca. 5 mm von $B'B''$) angeklebt. Abschließend werden die Rechtecke außerhalb des Hutes in Längsrichtung in schmale Streifen geschnitten. Abb. 2 zeigt das fertige Modell. In [3] wird noch erwähnt, dass für einen passenden Hut das Ausgangsquadrat eine Kantenlänge von mindestens 52 cm haben sollte.

Schneiden wir das gefaltete Modell nicht entlang $B'B''$ auf, so können wir es als Becher verwenden (Abb. 3).

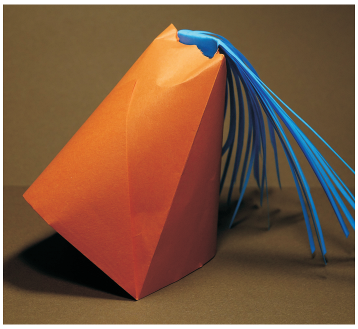

Abbildung 2: Hut

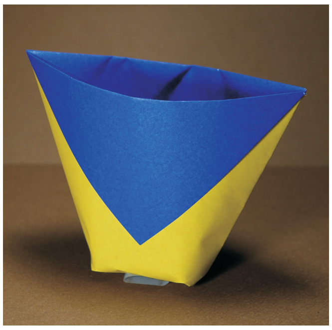

Abbildung 3: Becher

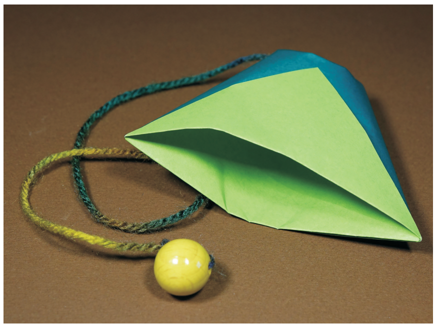

Abbildung 4: Spiel

Schließlich können wir auch noch ein kleines Geschicklichkeitsspiel daraus herstellen (Abb. 4d, vgl. [1], S.130f.). Dazu brauchen wir einen Faden, dessen Länge etwa dem Vierfachen des Abstandes von $B'B''$ zu $C'A'$ (Abb. 1d) entspricht. Das eine Ende wird durch ein kleines Loch in der Mitte der Strecke $B'B''$ geschoben und mit einem 'dicken' Knoten versehen, sodass der Faden nicht wieder durch das Loch herausrutschen kann. Am anderen Ende des Fadens wird z.B. eine kleine Holzperle angeknotet. Jetzt nehmen wir den Becher in die Hand und versuchen, durch geeignete Bewegungen die Kugel mit dem Becher aufzufangen.

Nun wenden wir uns noch einmal dem Faltprozess zu.

Das Falten von $A$ auf $A'$ ist dahingehend problematisch, dass wir erst durch Probieren die richtige Lage des Punktes $A'$ auf $CB$ finden, sodass die umgefaltete Kante parallel zu $AC$ ist.

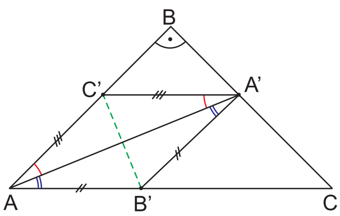


Abbildung 5:

Wir wollen versuchen, den Punkt $A'$ auf andere Weise zu bestimmen. Dazu stellen wir uns vor, dass wir den Punkt $A'$ auf $BC$ in der passenden Lage gefunden haben und überlegen, welche Eigenschaften die entstandene Figur dann hat (Abb. 5). $B'C'$ ist wieder die zugehörige Faltlinie. Weil $A'$ durch das Umfalten von $A$ an der Faltlinie $B'C'$ entstanden ist, muss $|AC'| = |C'A'|$ und $|AB'| = |B'A'|$ sein. Verbinden wir noch $A$ mit $A'$, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke $AA'C'$ und $AA'B'$, in denen die Basiswinkel jeweils gleichgroß sind. Weil $C'A'||AC$ ist, muss $|\sphericalangle AA'C'| = |\sphericalangle A'AC|$ (Winkel an geschnittenen Parallelen) sein. Dies bedeutet aber, dass $AA'$ die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CAB$ ist.

Damit können wir den gesuchten Punkt $A'$ auf $BC$ nun leichter bestimmen. Wir müssen nur die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei $A$ im Dreieck $ACB$ falten. Diese schneidet $CB$ im gesuchten Punkt $A'$. Falten wir nun $A$ auf $A'$, so ist die umgefaltete Kante parallel zu $AC$, so wie es gefordert war.

Unseren Überlegungen entnehmen wir sogar noch etwas mehr: Die beiden Dreiecke $AA'C'$ und $AA'B'$ sind kongruent zueinander und damit ist $AB'A'C'$ ein Rhombus.

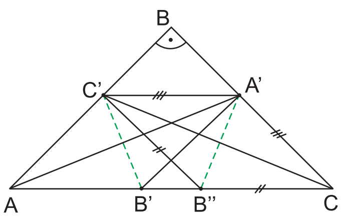


Abbildung 6:

Wir überlegen weiter: Weil $C'A'||AC$ ist, ist auch $|C'A'| = |A'C|$ (Abb. 6). Dies bedeutet aber auch, dass beim Falten von $C$ nach $C'$ die zugehörige Faltlinie durch $A'$ gehen muss, so wie wir es am Anfang vermuteten. Diese Faltlinie schneidet $AC$ in $B''$. Natürlich ist auch $CC'$ die Winkelhalbierende des Innenwinkels bei $C$ im Dreieck $ACB$ und $B''CA'C'$ ist ein Rhombus, der zu $AB'A'C'$ kongruent ist.

Nun können wir auch die Längen der Strecken $C'A'$ und $B'B''$ berechnen. Dazu gehen wir davon aus, dass unser Ausgangsquadrat die Seitenlänge $a$ hat. Folglich ist $|AC| = a\sqrt{2}$.

Weil sich $A'$ auf $CB$ durch die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle CAB$ ergibt, ist es hilfreich zu wissen, dass jede Winkelhalbierende in einem Dreieck die Gegenseite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Dieser elementargeometrische Satz ist mit Schulmitteln leicht zu beweisen (vgl. [2]).

Mit der Anwendung dieses Satzes folgt $\frac{|CA'|}{|A'B|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, also $\frac{|CA'|}{|CB|-|CA'|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ bzw. $\frac{|CA'|}{a-|CA'|} = \frac{a\sqrt{2}}{a}$. Daraus ergibt sich $|CA'| = (a - |CA'|)\sqrt{2}$ oder $|CA'| \cdot (\sqrt{2} + 1) = a\sqrt{2}$ bzw. $|CA'| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}a = (2 - \sqrt{2})a$.

Für $|B'B''|$ erhalten wir $|B'B''| = |AC| - 2|AB'| = |AC| - 2|CA'| = a\sqrt{2} - 2(2 - \sqrt{2})a = (3\sqrt{2} - 4)a$.

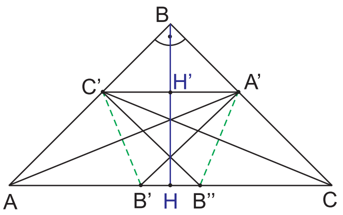


Abbildung 7:

Als Nächstes wollen wir noch den Flächeninhalt des Trapezes $B'B''A'C'$ berechnen. Dazu brauchen wir nur noch den Abstand von $B'B''$ zu $C'A'$ zu bestimmen. Wir zeichnen die Höhe von $B$ auf $AC$ (Abb. 7). Dabei bezeichnet $H$ den Höhenfußpunkt auf $AC$ und $H'$ den Schnittpunkt mit $C'A'$. Weil $C'A'||AC$ ist folgt mit dem Strahlensatz (Zentrum $B$) $\frac{|BH'|}{|H'H|} = \frac{|BA'|}{|A'C|}$.

Weil $|BH| = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ist, und wir die anderen Streckenlängen bereits berechnet haben, folgt $\frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}-|HH'|}{|HH'|} = \frac{a-(2-\sqrt{2})a}{(2-\sqrt{2})a} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Daraus erhalten wir $|HH'| = (\sqrt{2} - 1)a$.

Damit ist $|H'H| = |BA'|$, denn $|BA'| = a - |A'C| = a - (2 - \sqrt{2})a = (\sqrt{2} - 1)a$.

Nun können wir den Flächeninhalt des Trapezes $B'B''A'C'$ berechnen. Es ist

$|B'B''A'C'| = \frac{|B'B''|+|C'A'|}{2} \cdot |H'H| = \frac{(3\sqrt{2}-4)a+(2-\sqrt{2})a}{2} \cdot (\sqrt{2}-1)a = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)a^2 = ((\sqrt{2}-1)a)^2$
$= |BA'|^2 = 2|C'A'B|$.

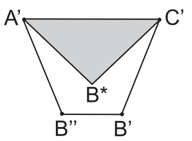


Abbildung 8:

Dieses Ergebnis ist überraschend. Es besagt, dass der Flächeninhalt des Trapezes doppelt so groß ist wie der Flächeninhalt des oberen Dreiecks. Da dieses Dreieck umgefaltet wird, Abb. 8 zeigt die fertige Figur, bedeutet dies, dass die schattierte Fläche genau so groß ist wie der nicht bedeckte Teil des Trapezes.

Abb. 9 zeigt die fertige Figur von der anderen Seite. Dort ist das entsprechende Dreieck in eine Tasche geschoben und damit nicht sichtbar. Wir erkennen aber hier ein kleines Dreieck $B'B''B^*$. Wir wollen noch den Flächeninhalt dieses kleinen Dreiecks bestimmen. Vielleicht ergibt sich auch hier wieder ein einfacher Zusammenhang zu anderen Teilen der Figur.

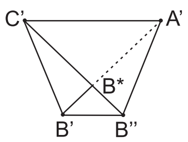


Abbildung 9:

Zuerst überlegen wir uns, dass dieses Dreieck gleichschenklig rechtwinklig ist. Dazu betrachten wir wieder Abb. 6. Wir hatten uns überlegt, dass $AB'A'C'$ und $B''CA'C'$ Rhomben sind und folglich $B'A'||AB$ und $B''C'||CB$ gelten muss. Da $ACB$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist, muss auch $B'B''B^*$ gleichschenklig und bei $B^*$ rechtwinklig sein. Damit ist aber dieses Dreiecks ein Viertel des Quadrates über $B'B''$. Es gilt also $|B'B''B^*| = \frac{1}{4}|B'B''|^2 = \frac{1}{4}(3\sqrt{2}-4)^2a^2$ und wir erkennen leider keine offensichtliche und einfache Beziehung dieses Flächeninhaltes zu bereits berechneten Flächeninhalten.

# Literatur

[1] Barff,U.; Burkhardt, I.; Maier, J.: *Das große farbige Bastelbuch für Kinder*. Falken, 1993.

[2] Richter, Ch.; Schmitz, M.: *Übersicht zur Geometrie in der Schule (SekundarstufeI)*.FSU Jena, Preprint, 2014. (http://www.minet.uni-jena.de/preprints/richter_14)

[3] Schönherr, J.: *Wir falten und falzen*. Rudolf Arnold Verlag, Leipzig, 1975.

[4] Wikipedia-Eintag *Fes (Kopfbedeckung)*: https://de.wikipedia.org/wiki/Fes_(Kopfbedeckung).

.

## Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de).