Mathegami
Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de April 2025

Modifizierter Kolumbus-Würfel

Michael Schmitz

In „Der Kolumbuswürfel“ [2] haben wir bereits einen Würfel mit einer eingestülpten Ecke aus Modulen zusammengesetzt. Dort haben wir auch die Namensgebung für diesen Würfel erläutert. Im Bild 1 ist ein solcher Würfel zu sehen.
Wenn die Kantenlänge des quadratischen Ausgangsfaltpapiers für die Module $2a$ ist, dann ist a die Kantenlänge des Würfels und r die *Restkantenlänge* an der eingestülpten Ecke. Beim Kolumbuswürfel ist $r = \frac{a}{2}$.

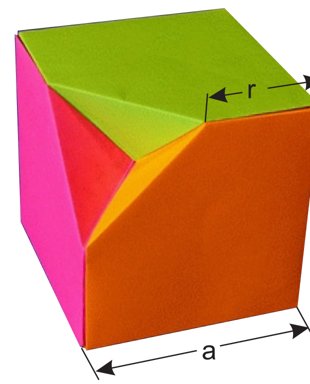

Bild 1:
Der Kolumbuswürfel.

Nun modifizieren wir den Kolumbuswürfel dahingehend, dass wir Würfel mit einer eingestülpten Ecke und einer vorgegebenen Restkantenlänge r, $0 \le r \le a$ aus Modulen zusammensetzen werden.
Den Spezialfall $r = a$ kennen wir bereits als Würfel ohne eingestülpter Ecke [1]. Den Spezialfall $r = 0$ behandeln wir etwas später.

Für den modifizierten Kolumbuswürfel brauchen wir ebenfalls zwei Modultypen und davon jeweils drei Stück.
Nun sei also r eine Zahl mit $0 < r < a$, und wir beginnen mit einem quadratischen Faltpapier der Länge $2a$ (Bild 2a). Wir falten zuerst die linke und rechte obere Ecke an den Mittelpunkt der oberen Seite, wodurch ein Rechteck mit den Seitenlängen a und $2a$ (Bild 2b) entsteht. Die obere Kante falten wir so um, dass die Faltlinie parallel zu oberen Kante verläuft und zu ihr den Abstand r hat (Bild 2c). In unserem Beispiel ist $r = \frac{1}{3}a$.

Nun falten wir die untere Kante des Rechtecks an die umgefaltete obere Kante heran (Bild 2c). Es entsteht ein Quadrat mit der Seitenlänge a, das jetzt aus vier Papierschichten besteht. Die eben umgefaltete Kante wird wieder zurück in ihre Ausgangsposition gefaltet (Bild 2e). Anschließend falten wir die rechte Kante an die umgefaltete obere Kante heran, wie es ebenfalls im Bild 2e zu sehen ist. Der nächste Faltschritt ist im Bild 2f dargestellt und besteht aus zwei fast gleichzeitig auszuführenden Faltungen, wobei die rot markierte Faltkante zusätzlich entsteht. Das Ergebnis dieses Faltschrittes zeigt Bild 2g. Falten wir nun noch die umgefaltete obere und untere Kante senkrecht nach oben (Bild 2h), so entsteht der erste Modultyp, der auch im Bild 2i im Vordergrund zu sehen ist. Dort erkennt man deutlich die eingefaltete Ecke. Von diesem Modultyp brauchen wir drei Exemplare.

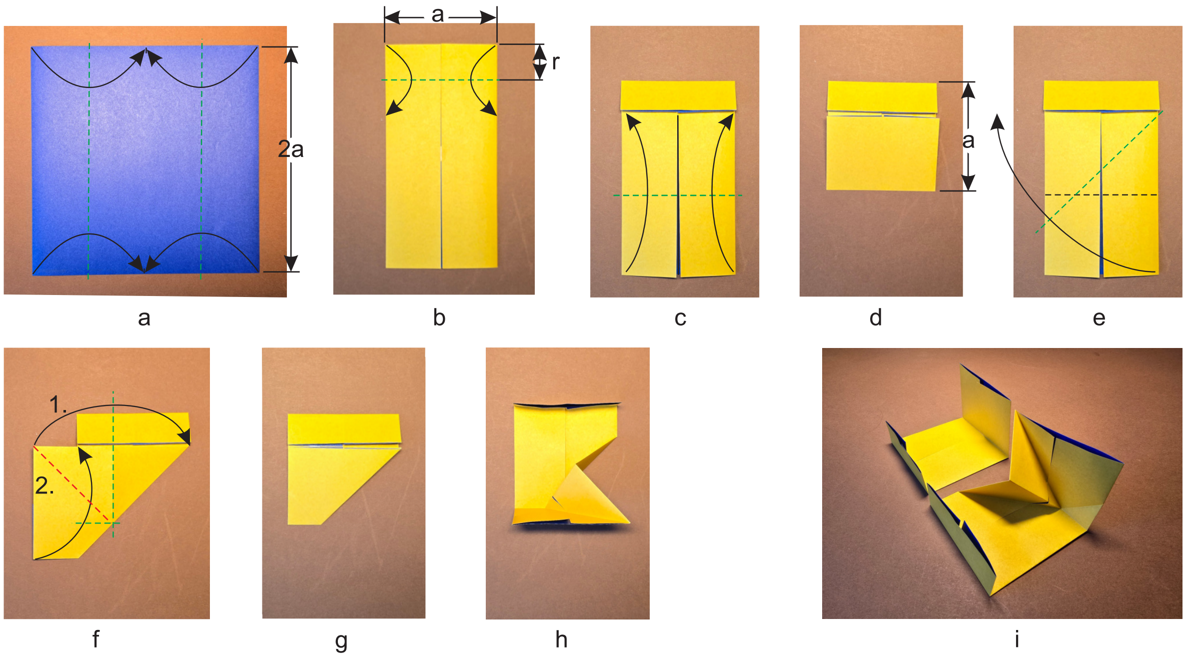

Bild 2: Module falten.

Der zweite Modultyp ist im Bild 2i im Hintergrund zu sehen. Um diesen zu falten, folgen wir den Faltschritten aus Bild 2a - d. Zum Abschluss falten wir jetzt die umgefaltete obere und untere Kante senkrecht nach oben. Auch von diesem Modul benötigen wir drei Exemplare.
Im Bild 3 sind alle sechs Module zu sehen.

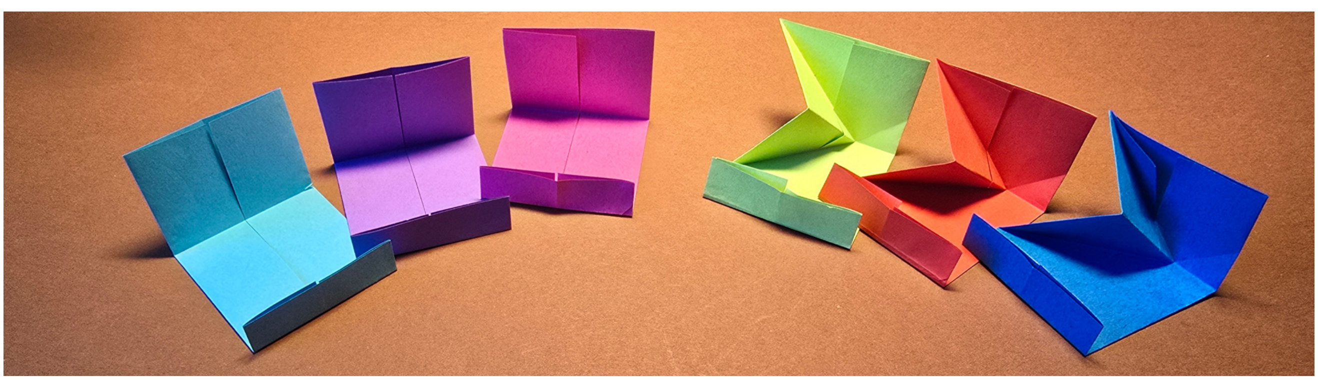

Bild 3: Die sechs Module für den modifizierten Kolumbuswürfel.

Im Bild 4 ist zu sehen, wie die Module zusammengesteckt werden. Wir beginnen dabei zuerst mit den drei Modulen, die die eingestülpte Ecke ergeben. Diese werden miteinander verflochten, wie man es in den Bildern 4a - d sehen kann.
Dann kommen die anderen drei Module an die Reihe, wobei wir darauf achten, dass eine kurze Lasche immer einer langen Lasche gegenüberliegt (Bilder 4e bzw. f). So passen dann die restlichen drei Module gut zu denen mit der eingestülpten Ecke und im Innern des Würfels gibt es keine Überlappungen.

Im Bild 4k sehen wir den fertigen modifizierten Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge $r = \frac{1}{3}a$.

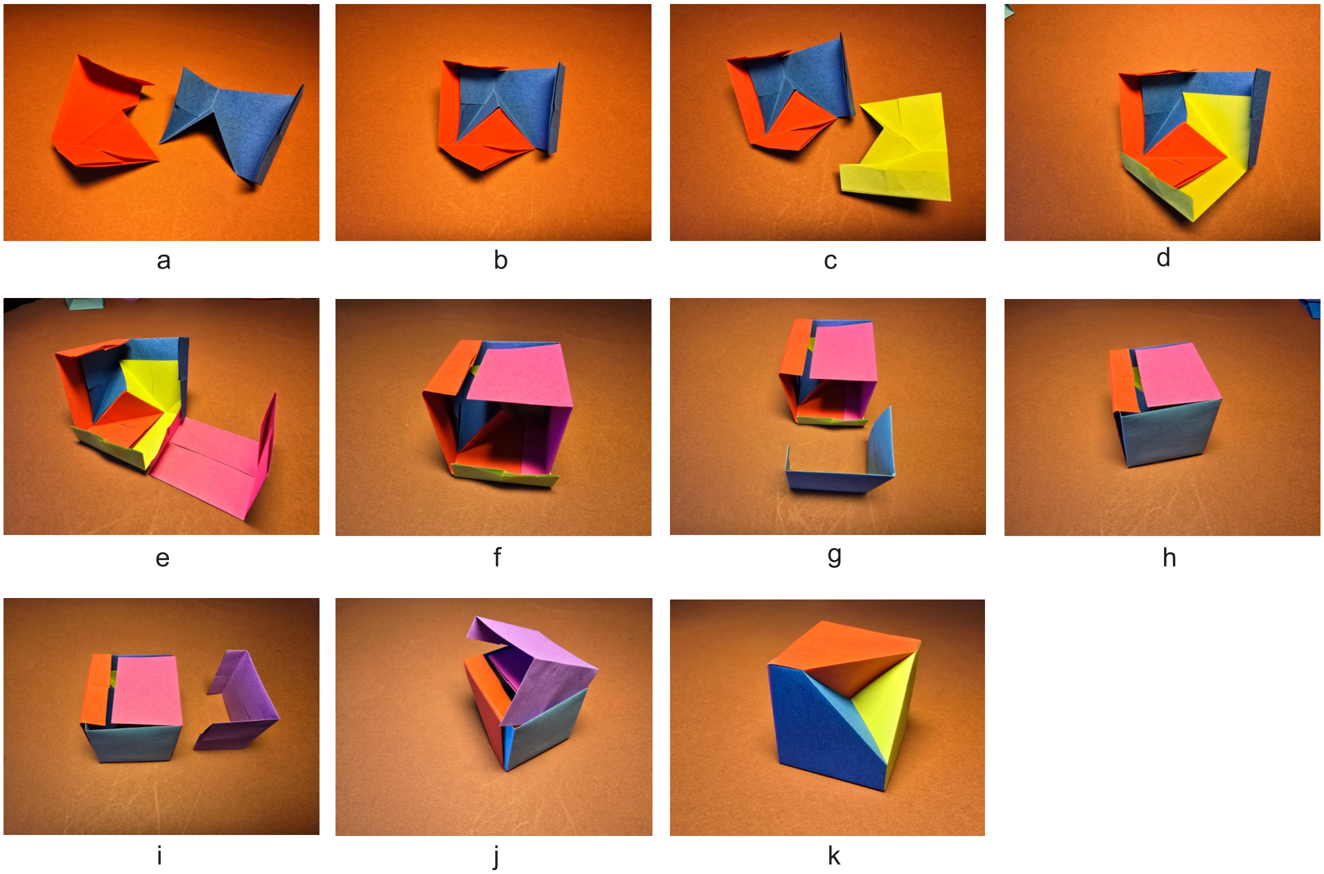

Bild 4: Der Zusammenbau des modifizierten Kolumbuswürfels.

Im Bild 2 haben wir das Falten eines Moduls mit $r = \frac{1}{3}a$ gezeigt, also $0 < r < \frac{1}{2}a$.

Aber diese Faltanleitung funktioniert auch für r mit $\frac{1}{2}a \leq r < a$. Im Bild 5 sind spezielle Faltungen aus Bild 2 für $r = \frac{1}{2}a$ (also den Kolumbuswürfel) zu sehen und weiterhin das fertige Modul.

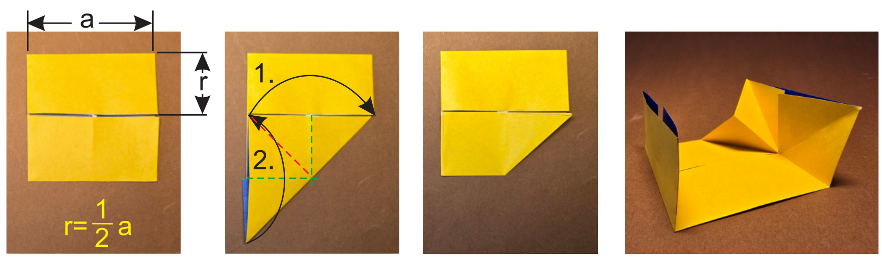

Bild 5: Modul mit Restkantenlänge $r = \frac{1}{2}a$

Bild 6 zeigt die gleichen Faltungen für $r = \frac{2}{3}a$, sowie das fertige Modul.

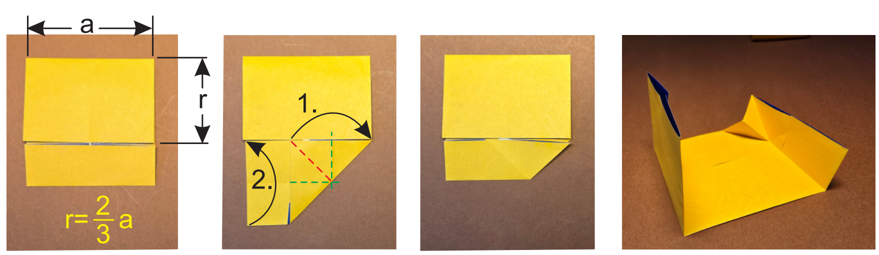

Bild 6: Modul mit Restkantenlänge $r = \frac{2}{3}a$

Natürlich werden auch hier jeweils drei Module mit der eingefalteten Ecke benötigt. Die anderen drei Module müssen entsprechend dem gewählten r angepasst werden.

Im Bild 7 sehen wir verschieden modifizierte Kolumbuswürfel mit verschiedenen Werten für r.

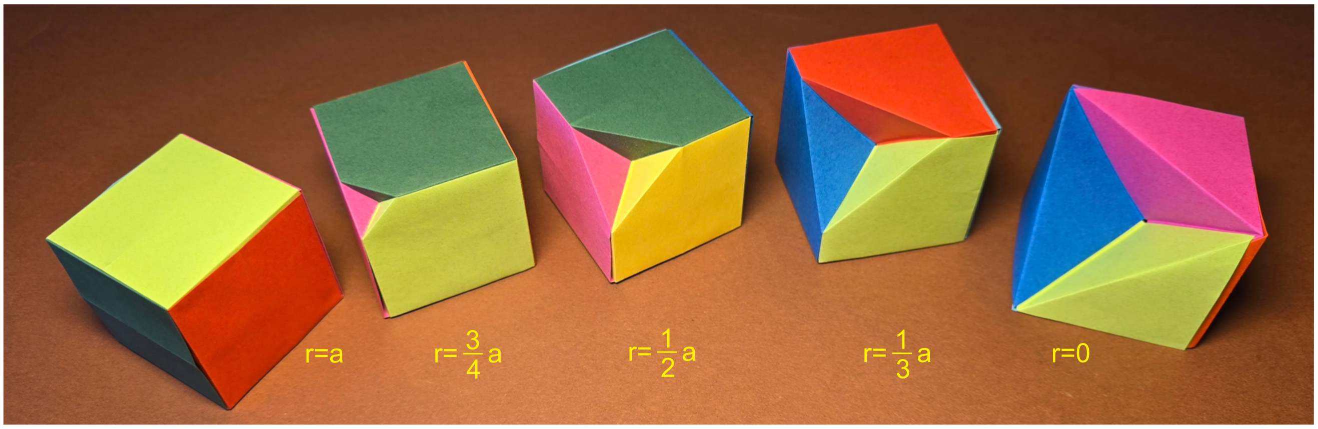

Bild 7: Verschiedene modifizierte Kolumbuswürfel.

Nun befassen wir uns mit dem Fall, dass die Restkantenlänge $r = 0$ ist.
Auch hier benötigen wir wieder zwei Modultypen. Für den ersten ist die Faltfolge wie in Bild 2 gezeigt, nur dass jetzt $r = 0$ ist und damit die obere Kante nicht umgefaltet werden muss. Dafür wird die untere Kante direkt auf die obere gefaltet.

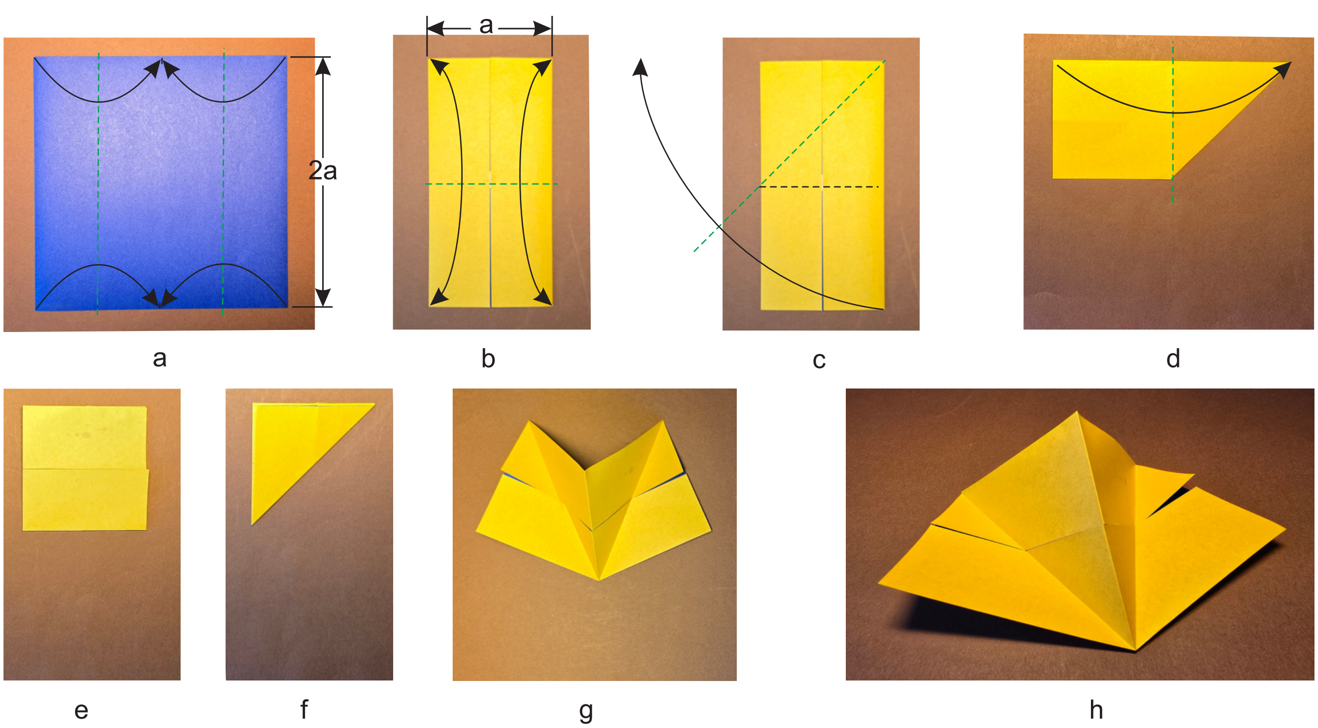

Bild 8: Faltfolge für den ersten Modultyp mit $r = 0$.

Bild 8 zeigt die komplette Faltfolge und das fertige Modul für diesen Modultyp.
Die Faltfolge für den zweiten Modultyp zeigt Bild 9.

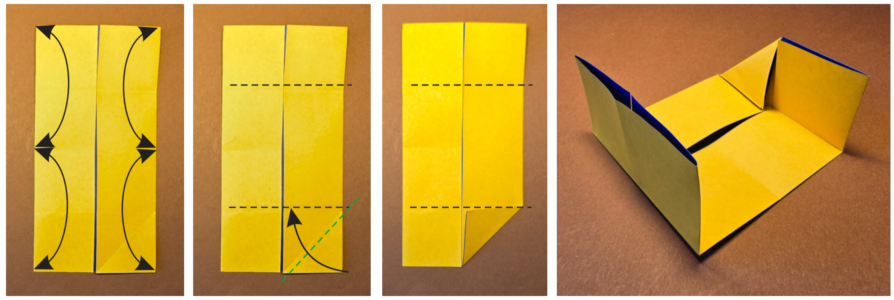

Bild 9: Zweiter Modultyp mit $r = 0$

Das Zusammenstecken des modifizierten Kolumbuswürfels mit der Restkantenlänge $r = 0$ ist im Bild 10 zu sehen.

Zuerst werden die drei Module mit der eingefalteten Ecke zusammengesteckt (Bilder 10a - e). Anschließend folgen die drei anderen Module, die nach und nach angebaut werden. Dabei ist darauf zu achten, dass die Laschen mit der abgeknickten Ecke in die entsprechenden Taschen eingesteckt werden (z.B. Bilder 10f - g).

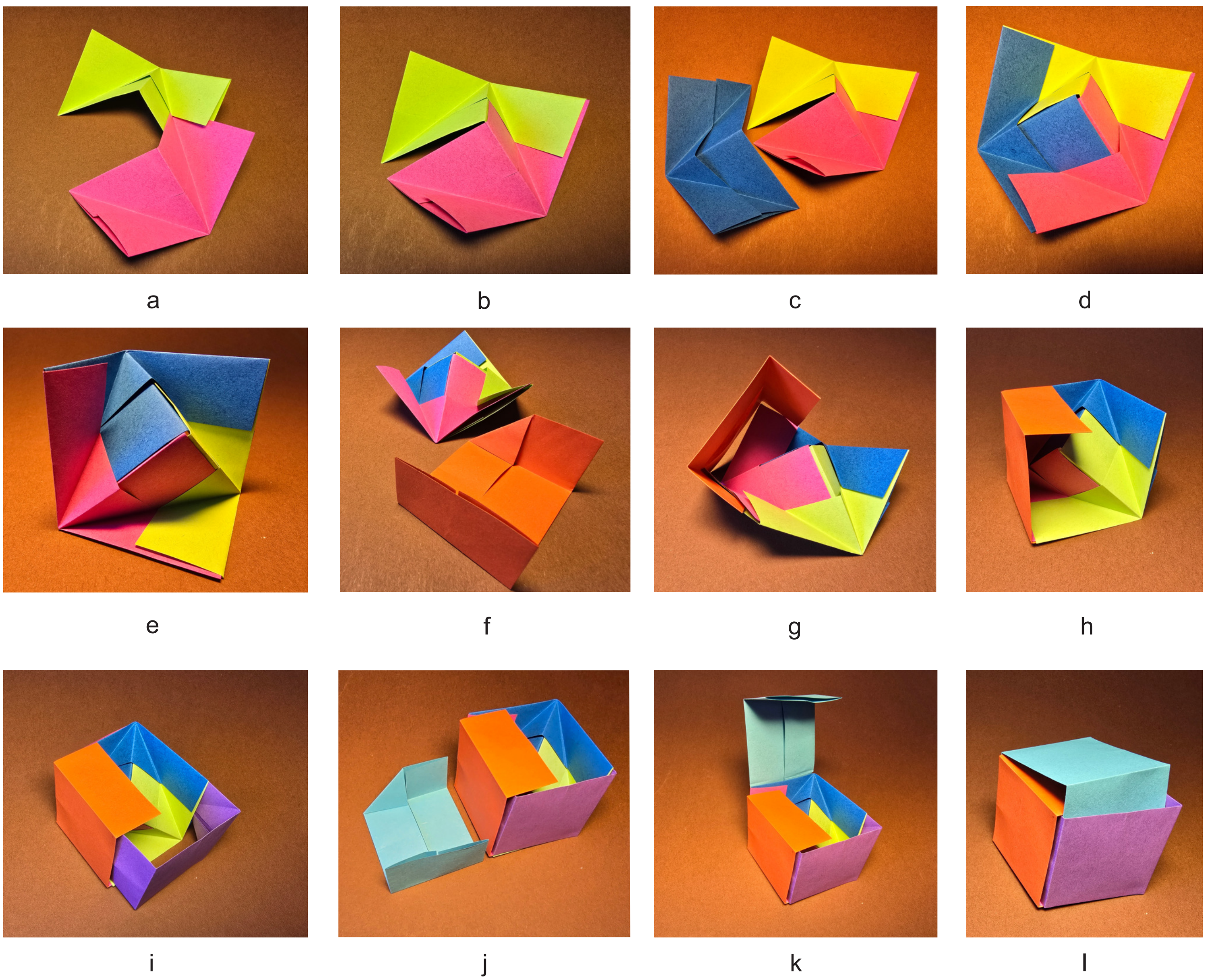

Bild 10: Zusammensetzen der Module für den modifizierten Kolumbuswürfel mit $r = 0$.

Bild 11 zeigt den fertigen modifizierten Kolumbuswürfel mir $r = 0$ in verschiedenen Lagen.

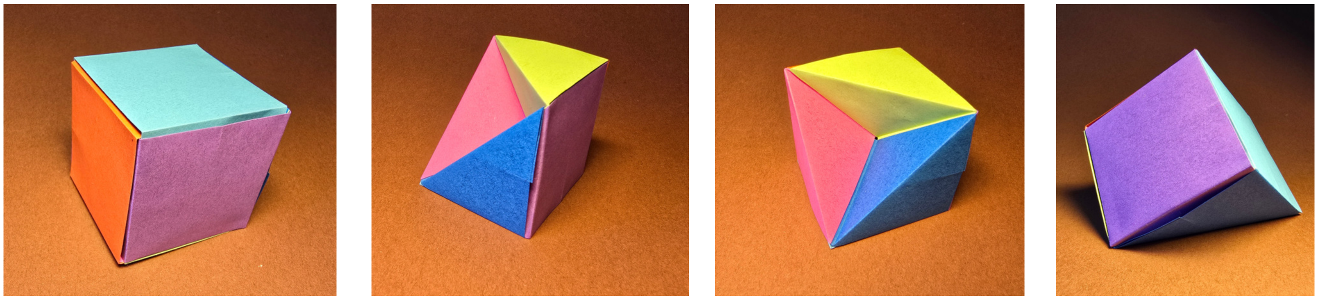

Bild 11: Der modifizierte Kolumbuswürfel mit $r = 0$.

Natürlich lassen sich modifizierte Kolumbuswürfel auch stapeln (Bild 12). Ebenso können wir auch (fast) regelmäßige Fünfeckringe zusammenlegen, wie das bereits in [2] geschehen ist. Da die Winkelverhältnisse hier genau so sind wie beim Fünfeckring aus Kolumbuswürfeln (vgl. [2]) entsteht auch hier kein echter Fünfeckring.

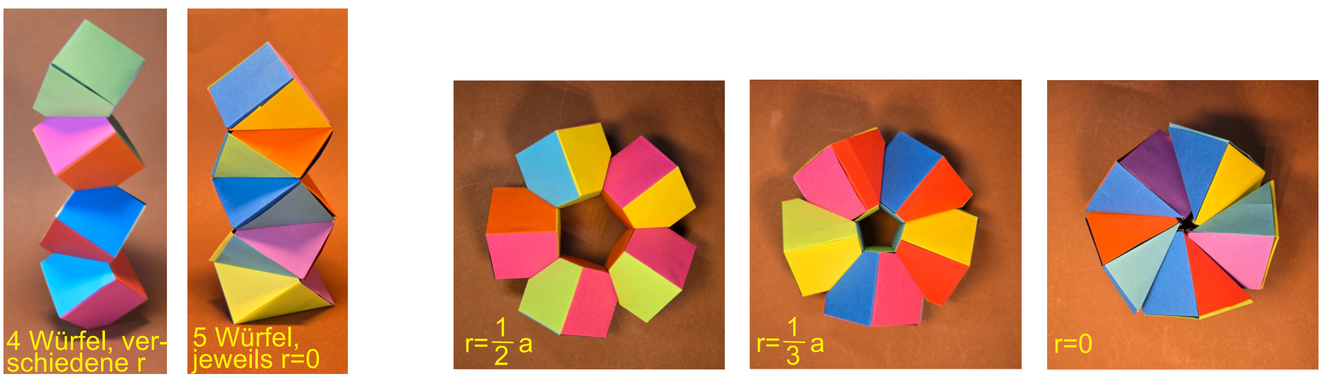

Bild 12: Türme und Ringe

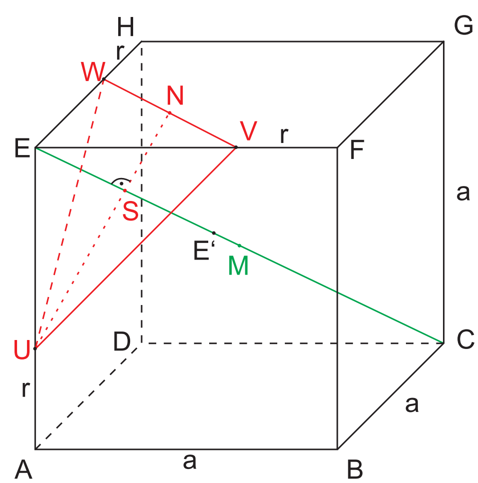

Bild 13: Würfel mit der Kantenlänge a und der Restkantenlänge r bezüglich E.

Natürlich können wir bei einem modifizierten Kolumbuswürfel mit Restkantenlänge r auch gleichzeitig zwei gegenüberliegende Ecken nach innen gestülpt. Machen wir das aber von den gegenüberliegenden Ecken mit demselben r, dann dürfen sich die eingestülpten Ecken aber nicht behindern. Daher bestimmen wir nun das r, für das die eingestülpte Ecke genau im Würfelmittelpunkt landet.
Dazu betrachten wir einen Würfel $ABC...GH$ (Bild 13) mit der Kantenlänge a und der Restkantenlänge r bezüglich der einzudrückenden Ecke E. Dadurch werden die Punkte U, V und W auf den entsprechenden Würfelkanten bestimmt. Die Raumdiagonale EC des Würfels geht durch den Schwerpunkt S des gleichseitigen Dreiecks UVW. Die eingestülpte Ecke E' ergibt sich als Spiegelbild von E an S. Wir bestimmen $|EE'|$.
Da $|EE'| = 2|ES|$ ist, bestimmen wir die Höhe von E über der Grundfläche UVW und beginnen mit $|UV| = (a - r)\sqrt{2}$. Dies er-

gibt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck UVE.
Im rechtwinkligen Dreieck UVN gilt dann: $|UN|^2 = |UV|^2 - (\frac{1}{2}|UV|)^2 = \frac{3}{4}|UV|^2$, also $|UN| = \frac{1}{2}\sqrt{3}|UV|$. Damit erhalten wir im rechtwinkligen Dreieck USE:
$|ES|^2 = |UE|^2 - |US|^2 = (a-r)^2 - (\frac{2}{3}|UN|)^2 = (a-r)^2 - (\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}|UV|)^2 = (a-r)^2 - (\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}(a-r)\sqrt{2})^2$,
$|ES|^2 = \frac{1}{3}(a-r)^2$, also $|ES| = \frac{1}{3}\sqrt{3}(a-r)$.

Damit ist auch $|EE'| = \frac{2}{3}\sqrt{3}(a-r)$. Da die Raumdiagonale EC des Würfels die Länge $|EC| = a\sqrt{3}$ hat, können wir nun auch das r bestimmen, für das E' mit dem Würfelmittelpunkt M übereinstimmt. In diesem Fall muss $|EE'| = \frac{1}{2}|EC|$ gelten, also $\frac{2}{3}\sqrt{3}(a-r) = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Aus der letzten Gleichung ergibt sich $4(a-r) = 3a$, woraus $r = \frac{1}{4}a$ folgt. Das heißt, wenn man bei einem Würfel mit der Kantenlänge a zwei gegenüberliegende Ecken (E und C) jeweils mit der zugehörigen Restkantenlänge $r = \frac{1}{4}a$ nach innen stülpt, dann treffen die eingestülpten Ecken im Würfelmittelpunkt zusammen. Das bedeutet aber auch, dass sich bei einem Würfel mit der Kantenlänge a nur dann zwei gegenüberliegende Ecken mit der selben Restkantenlänge r einstülpen lassen, wenn $1 \geq r \geq \frac{1}{4}a$ gilt.

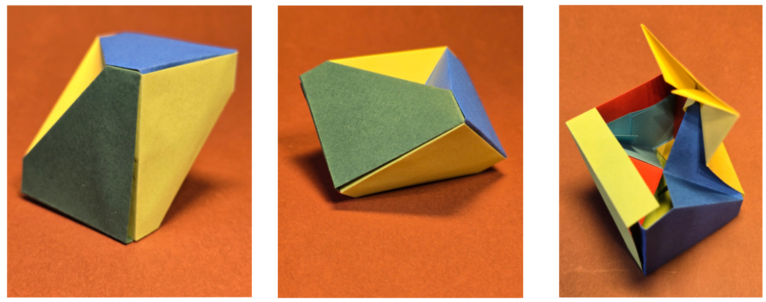

Bild 14: Würfel mit zwei gegenüberliegenden eingestülpten Ecken, $r = \frac{1}{4}a$.

Bild 14 zeigt einen solchen Würfel mit zwei gegenüberliegenden eingestülpten Ecken und $r = \frac{1}{4}a$, sowie einen Blick ins Innere dieses Würfels. Dort sieht man die sich berührenden eingestülpten Ecken.

An dieser Stelle betrachten wir noch einmal einen modifizierten Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge r, $a \geq r \geq 0$ (Bild 13).
Es ist klar, dass die Oberfläche dieses modifizierten Kolumbuswürfels $O(r) = 6a^2$ (für jedes r) beträgt.
Das Volumen $V(r)$ dieses Körpers ergibt sich wie folgt: $V(r) = a^3 - 2V_P(r)$, wobei $V_P(r)$ das Volumen der Pyramide $UVWE$ ist (Bild 13).
Nehmen wir UVW als Grundfläche, dann gilt: $V_P(r) = \frac{1}{3}|UVW| \cdot |ES| = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|VW||UN|\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}(a-r)$.
Da $|VW| = |UV|$ ist, folgt: $V_P(r) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(a-r)\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}(a-r)\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}(a-r) = \frac{1}{6}(a-r)^3$.
Damit wird $V(r) = a^3 - \frac{1}{3}(a-r)^3$.
Speziell ist $V(0) = \frac{2}{3}a^3$, $V(\frac{a}{2}) = \frac{23}{24}a^3$, das Volumen des Kolumbuswürfels (vgl. [2]), und $V(a) = a^3$, das Volumen des Würfels.

Betrachten wir noch einmal den modifizierten Kolumbuswürfel mit $r = \frac{1}{4}a$, bei dem die eingestülpte Ecke im Würfelmittelpunkt liegt, dann ist $V(\frac{1}{4}a) = \frac{55}{64}a^3$.
Stülpen wir auch noch die gegenüberliegende Ecke ein, dann erhalten wir für das Volumen des Restkörpers $V_{Restkrper} = V(\frac{1}{4}a) - 2V_P(\frac{1}{4}a) = \frac{23}{32}a^3$ und beenden damit unsere Betrachtungen.

Literatur

[1] Schmitz, M.: *Vom Quadrat zum Würfel*. Mathegami, 2009.

[2] Schmitz, M.: *Der Kolumbuswürfel*. Mathegami, 2009.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir gern eine E-Mail (mathegami@web.de).