MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

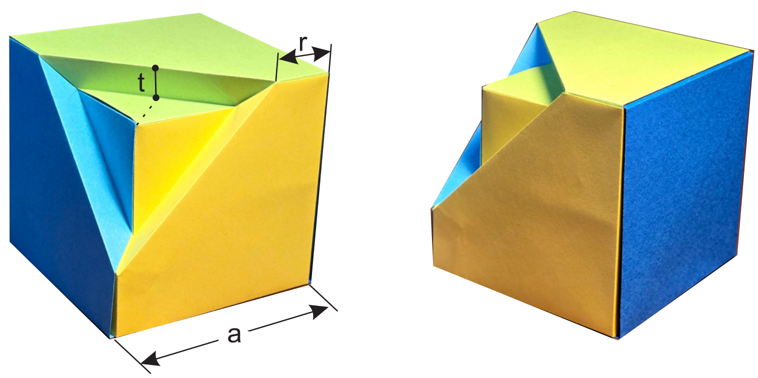
www.mathegami.de September 2025

Modifizierter Kolumbus-Würfel mit ausgestülpter Ecke

Michael Schmitz

In diesem Mathegami werden wir einen modifizierten Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge r ([3]) weiter verändern, die eingestülpte Ecke wird nun wieder etwas nach außen gestülpt. Im Bild 1 ist ein Beispiel für solch einen Würfel zu sehen. Mit t bezeichnen wir die Tiefe, bei der das Ausstülpen der inneren Ecke beginnt.

Dabei setzen wir zuerst $0 < r < a$ voraus, die Spezialfälle $r = 0$ und $r = a$ besprechen wir später.



a b

Bild 1: Der Kolumbuswürfel mit ausgestülpter Ecke.

Im Bild 2 ist dieser Würfel mit der ausgestülpten Ecke noch einmal als Kantenmodell zu sehen. t ist dann gleich der Strecke $|NN^*|$, wobei N und N^* die Mittelpunkte von VW bzw. von V^*W^* sind. NN^* ist natürlich ein Teil von NE'.

Wir bestimmen nun den Bereich, in dem t gewählt werden kann. Dazu bedenken wir, dass E' das Spiegelbild von E an der durch U, V und W bestimmten Ebene ist. Da NN^* ein Teil von NE' ist, müssen wir die Länge von NE' bestimmen. NE' ist die Höhe auf VW im gleichschenkligen Dreieck $E'VW$ mit VW als Basis. Dieses Dreieck ist kongruent zum Dreieck EVW und damit bei E bzw. E' rechtwinklig. Daher ist $|E'V| = |E'W| = a - r$ und damit $|VW| = (a - r)\sqrt{2}$. Da $E'VW$ bei E' rechtwinklig und N der Mittelpunkt von VW ist, folgt $|NE'| = \frac{a-r}{2}\sqrt{2}$. Also muss $0 \le t \le \frac{a-r}{2}\sqrt{2}$ gelten.

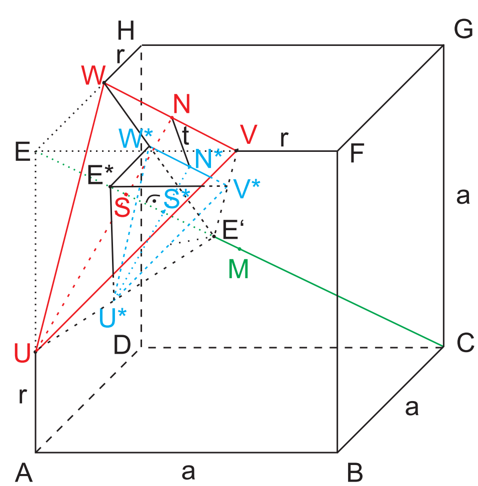


Bild 2: Kantenmodell.

Ist $t = 0$, dann erhalten wir einen Würfel.
Ist $t = \frac{a-r}{2}\sqrt{2}$, dann erhalten wir einen modifizierten Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge r.

Bei dieser Gelegenheit bemerken wir auch, dass die Oberfläche eines modifizierten Kolumbuswürfels mit ausgestülpter Ecke (Kantenlänge a) gleich $6a^2$ ist, unabhängig von der Wahl der Werte r und t.

Zur Bestimmung des Volumens dieses Körpers bedenken wir, dass $V(r,t) = a^3 - 2V_P(r) + 2V_P(t)$ ist, wobei $V_P(r)$ und $V_P(t)$ die Volumen der Pyramiden $UVWE$ bzw. $U^*V^*W^*E^*$ (vgl. Bild 2) sind. (1)

Für die Pyramide $UVWE$ erhalten wir $V_P(r) = \frac{1}{3}|UVW| \cdot |ES| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|VW||UN||ES|$, wobei S der Fußpunkt des Lotes von E auf UVW ist. Damit ist S der Schwerpunkt dieses gleichseitigen Dreiecks. Weil $|UN| = (a-r)\sqrt{2}$ ist, ergibt sich $|UN|^2 = ((a-r)\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2}(a-r)\sqrt{2})^2$, also $|UN| = \frac{1}{2}(a-r)\sqrt{6}$.
Nun bestimmen wir $|ES|$ im Dreieck USE, welches bei S rechtwinklig ist:
$|ES|^2 = (a-r)^2 - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(a-r)\sqrt{6})^2$, also $|ES| = \frac{1}{3}(a-r)\sqrt{3}$.
Damit erhalten wir $V_P(r) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(a-r)\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}(a-r)\sqrt{6} \cdot \frac{1}{3}(a-r)\sqrt{3} = \frac{1}{6}(a-r)^3$, und haben das Volumen der Pyramide $UVWE$ bestimmt. (2)

Nun bestimmen wir das Volumen $V_P(r,t)$ der Pyramide $U^*V^*W^*E^*$.
Dazu bestimmen wir zuerst $|E^*N^*| = |EN| - t = \frac{1}{2}|VW| - t = \frac{1}{2}(a-r)\sqrt{2} - t$.
Dann ist weiter $|V^*W^*| = 2|E^*N^*| = (a-r)\sqrt{2} - 2t$.
Nun berechnen wir $|U^*N^*| = \sqrt{|U^*V^*|^2 - (\frac{1}{2}|V^*W^*|)^2}$. Bedenken wir, dass $|U^*V^*| = |V^*W^*|$ ist, dann wird $|U^*N^*| = \sqrt{\frac{4}{4}|V^*W^*|^2 - \frac{1}{4}|V^*W^*|^2} = \frac{1}{2}|V^*W^*|\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}[(a-r)\sqrt{2} - 2t] = \frac{1}{2}\sqrt{6}(a-r) - \sqrt{3}s$.

Als Nächstes müssen wir die Länge der Höhe E^*S^* der Pyramide $U^*V^*W^*E^*$ bestimmen, wobei S^* der Schwerpunkt des Dreiecks $U^*V^*W^*$ ist. Mit Hilfe des Höhensatzes im bei E^* rechtwinkligen Dreieck $U^*N^*E^*$ erhalten wir $|E^*S^*|^2 = \frac{1}{3}|U^*N^*| \cdot \frac{2}{3}|U^*N^*| = \frac{2}{9}|U^*N^*|^2$, also $|E^*S^*| = \frac{1}{3}\sqrt{2}|U^*N^*| = \frac{1}{6}\sqrt{12}(a-r) - \frac{1}{3}\sqrt{6}t = \frac{1}{3}\sqrt{3}(a-r) - \frac{1}{3}\sqrt{6}t$.

Damit können wir das Volumen $V_P(t)$ berechnen. Es ist
$V_P(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}[(a-r)\sqrt{2} - 2t] \cdot [\frac{1}{2}\sqrt{6}(a-r) - \sqrt{3}t] \cdot [\frac{1}{3}\sqrt{3}(a-r) - \frac{1}{3}\sqrt{6}t]$, woraus
$V_P(t) = \frac{1}{6}(a-r)^3 - \frac{1}{2}\sqrt{2}(a-r)^2t + (a-r)t^2 - \frac{1}{3}\sqrt{2}t^3$ folgt. (3)

Nun können wir das Volumen $V(r,t)$ des modifizierten Kolumbuswürfels mit der Restkantenlänge r und ausgestülpter Ecke mit der Tiefe t angeben:
$V(r,t) = a^3 - \sqrt{2}(a-r)^2t + 2(a-r)t^2 - \frac{2}{3}\sqrt{2}t^3$, wobei $0 \leq r \leq a$ und $0 \leq t \leq \frac{a-r}{2}\sqrt{2}$ gilt. (4)

Für $r = 0$ ist $0 \leq t \leq \frac{a}{2}\sqrt{2}$. Ist $r = 0$ und $t = 0$, dann erhalten wir einen *normalen* Würfel mit der Kantenlänge a. Ist $r = 0$ und $t = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ ergibt sich der modifizierte Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge 0.
Für $r = a$ ist $t = 0$. Auch hier erhalten wir den *normalen* Würfel mit der Kantenlänge a.

Nun wenden wir uns endlich dem Falten der sechs Module zu, die wir zum Zusammensetzen des modifizierten Kolumbuswürfels mit ausgestülpter Ecke benötigen.

Wenn die Kantenlänge des Würfels a betragen soll, benötigen wir sechs quadratische Faltblätter mit der Kantenlänge $2a$.

Alle sechs Quadrate mit der Kantenlänge $2a$ werden in einem 1. Arbeitsschritt in Quadrate mit der Kantenlänge a gefaltet (Bild 3).

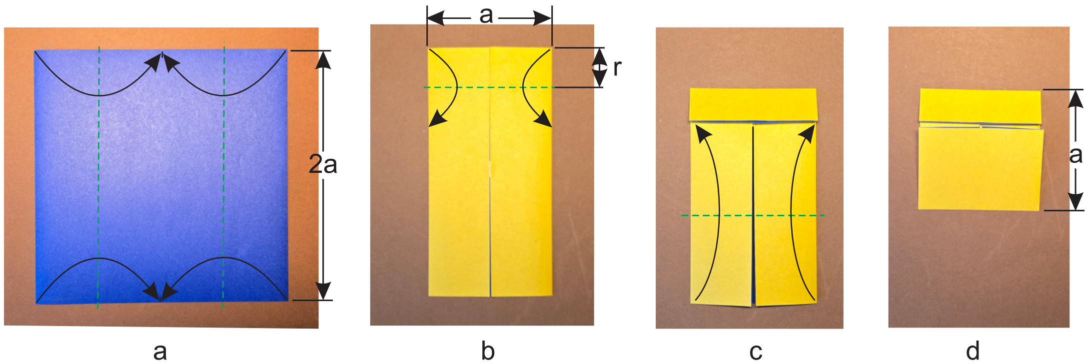


Bild 3: 1. Arbeitsschritte für alle sechs Quadrate.

Zuerst falten wir zwei zueinander parallele Quadratseiten an die zugehörige Mittellinie heran (Bild 3a). Dadurch entsteht ein Rechteck mit den Kantenlängen a und $2a$.
Dann wählen wir eine Zahl r ($0 < r < a$). Eine Kante mit der Länge a des Rechtecks falten wir nun in dem gewählten Abstand r um (Bild 3b). Dann wird die andere Rechteckseite mit der Länge a an die eben umgefaltete Kante herangefaltet (Bild 3c). Wir erhalten ein Quadrat mit der Kantenlänge a (Bild 3d).
Diesen 1. Arbeitsschritt müssen wir für alle sechs Quadrate durchführen. Dabei müssen wir darauf achten, dass für jedes Quadrat dasselbe r verwendet wird.

Von den sechs vorbereiteten Modulen wählen wir drei aus, die im 2. Arbeitsschritt weiter verarbeitet werden.

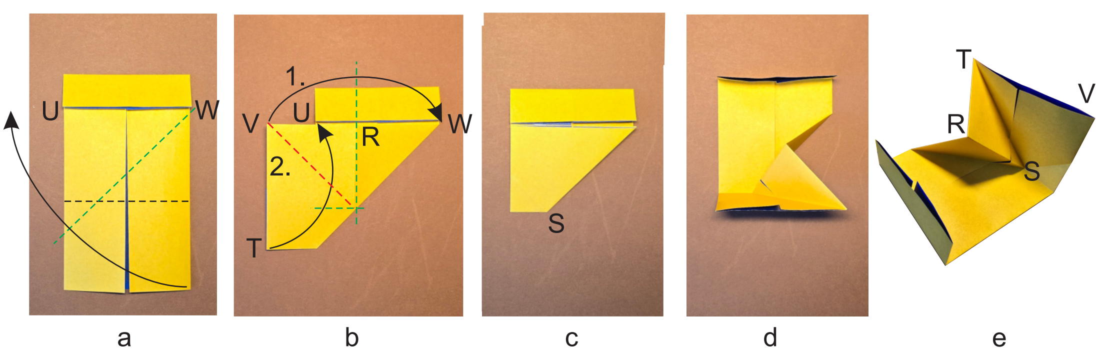


Bild 4: 2. Arbeitsschritte für drei Quadrate.

Dazu wird, in Bezug auf Bild 4a, die rechte untere Ecke so umgefaltet, wie es in diesem Bild zu sehen ist und sich Bild 4b ergibt. Von dieser Situation wird zuerst die Ecke V auf W gelegt, wobei T nach oben in den Raum geht. Die sich andeutende Faltkante wird von R aus glatt gestrichen, wobei jetzt die Ecke T auf U geht. Das Ergebnis ist im Bild 4c zu sehen. Abschließend werden die umgefalteten Seiten so aufgerichtet, dass sich dar in den Bildern 4d und e zu sehende Modul ergibt. Von diesem Modul brauchen wir drei Stück.

Mit diesen drei und den anderen drei Modulen können wir einen modifizierten Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge r zusammensetzen (vgl.[3]).

Nun wird das Modul aus Bild 4e weiter verändert. Dazu legen wir die nach oben stehenden Modulteile wieder in die Ebene, so wie es im Bild 5a gezeigt ist.

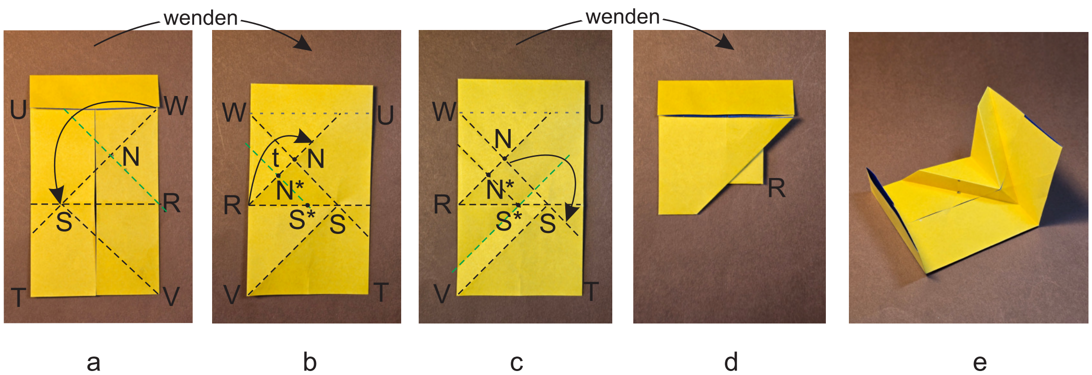


Bild 5: 3. Arbeitsschritte für drei Quadrate.

Wir falten W auf S und erhalten die zu WS senkrechte Faltlinie, die auch durch R geht und WS halbiert. N ist dieser Mittelpunkt.
Nun wenden wir das Modul (Bild 5b) und wählen die Tiefe t für die Ausstülpung der inneren Ecke, indem wir auf der Strecke NR einen beliebigen Punkt N^* wählen. Es ist dann $|NN^*| = t$. Als nächstes falten wir R so auf RN, dass die Faltlinie durch N^* geht. Diese Faltlinie schneidet RS in S^* (Bild 5c).
Nach dem Auffalten wird die Faltlinie WS so auf sich gefaltet, dass sie durch S^* geht.
Nach dem erneutem Auffalten wenden wir das Modul wieder. Nun lässt er sich so zusammenlegen, dass die im Bild 5d gezeigte Figur entsteht.
Falten wir nun wieder die Seitenteile senkrecht nach oben, so erhalten wir das fertige Modul, wie es im Bild 5e zu sehen ist. Auch von diesem Modul brauchen wir drei Stück, die mit demselben t gefaltet werden.

Im Bild 6 sind alle sechs Module zu sehen.

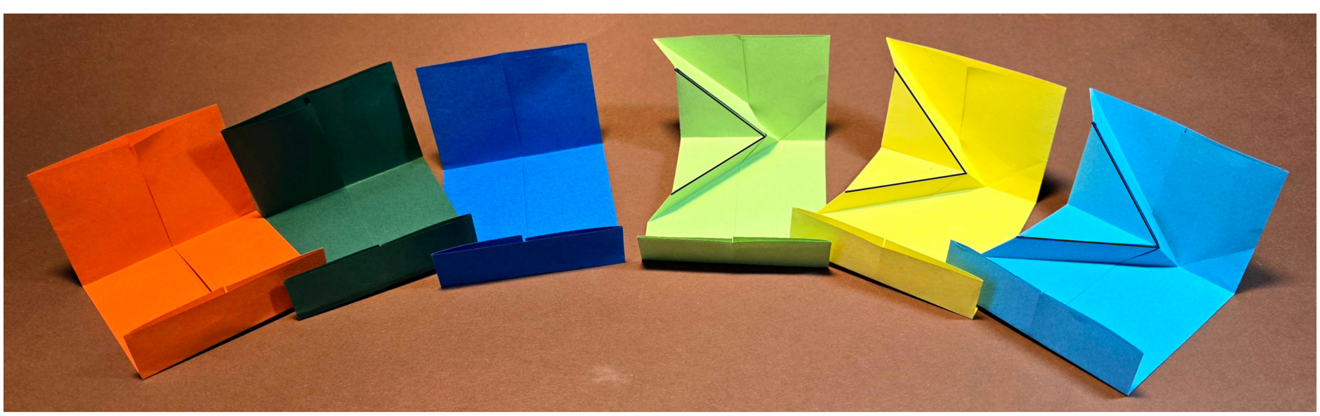
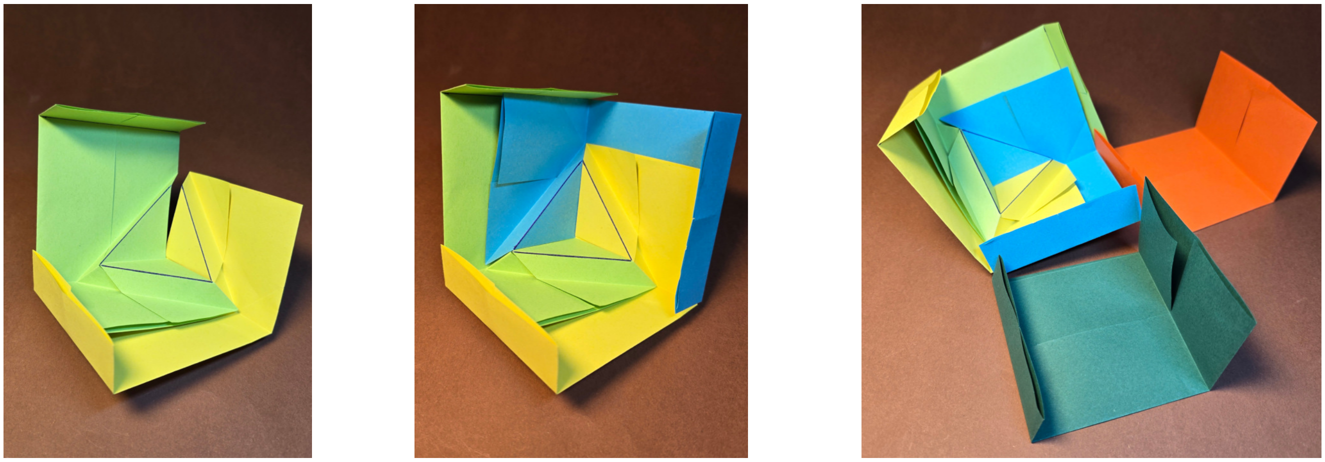


Bild 6: Die sechs Module für den modifizierten Kolumbuswürfel mit ausgestülpter Ecke.



a b c

Bild 7: Zusammenbau der Module.

In den Bildern 7 und 8 ist der Zusammenbau der Module gezeigt. Wir beginnen mit zwei Eckmodulen, die ineinander gehakt werden, wie es im Bild 7a zu sehen ist. Anschließend wird das dritte Eckmodul eingeflochten (Bild 7b). Im Bild 7c sehen wir, wie zwei einfache Module eingebaut werden. Dabei ist zu beachten, dass eine lange Lasche auf eine kurze trifft. Bild 8 zeigt schließlich, wie das dritte einfache Modul eingesetzt wird.

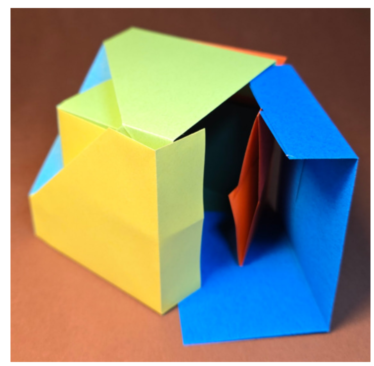


Bild 8: Zusammenbau der Module.

Damit ist der modifizierte Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge r und mit ausgestülpter Ecke mit der Tiefe t fertig zusammengebaut. Im Bild 9 ist dieser Körper in verschiedenen Lagen zu sehen.

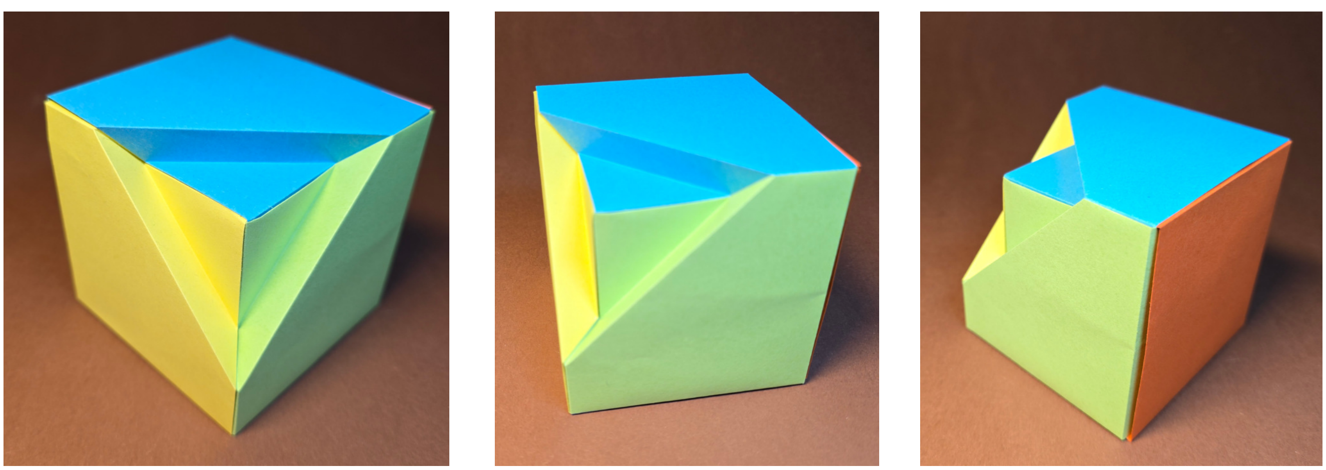
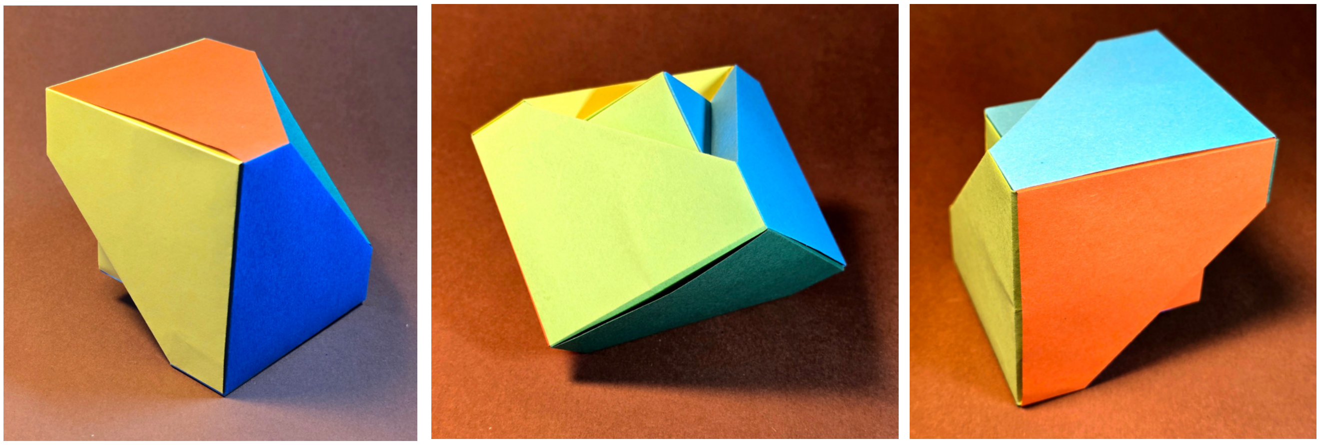


Bild 9: Der modifizierte Kolumbuswürfel mit ausgestülpter Ecke aus verschiedenen Ansichten.

Natürlich kann man bei solch einem Würfel auch noch andere Ecken einstülpen. Im Bild 10a wurde der obige Würfel an der gegenüberliegenden Ecke mit dem selben r eingestülpt. Dadurch kann man

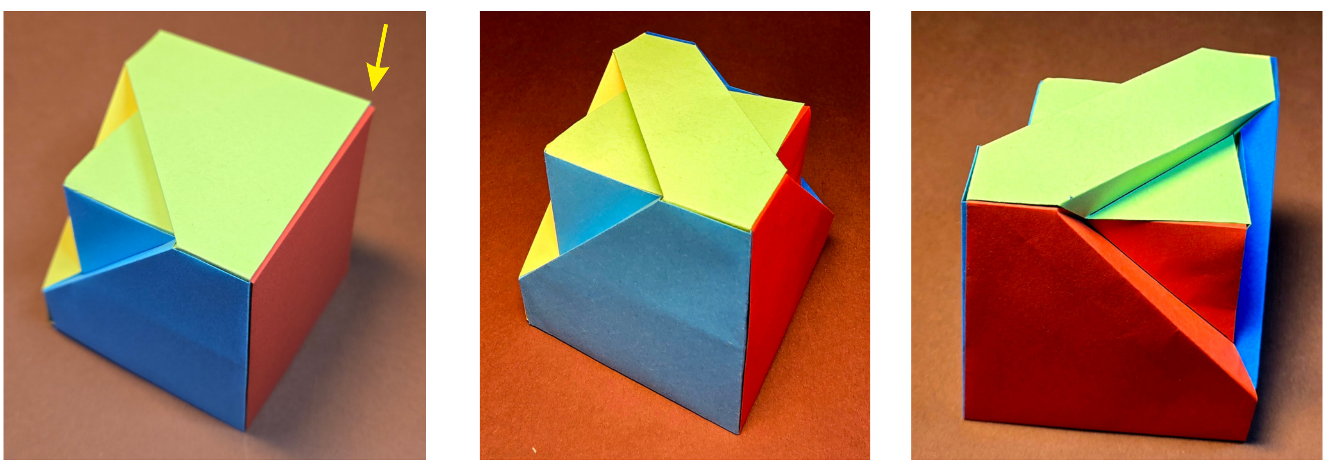
ihn auch auf *diese Ecke* stellen (Bild 10b).
Im Bild 10c wurde die eingestülpte Ecke (mit demselben t wie die gegenüberliegende Ecke) wieder ausgestülpt. Die Module für diese Ecke werden analog zu den bisherigen Eckmodulen gefaltet.
Die Tiefe t für das Ausstülpen wird dabei z.B. durch abmessen übertragen.



a b c

Bild 10: Der modifizierten Kolumbuswürfel mit zwei eingestülpten Ecken.

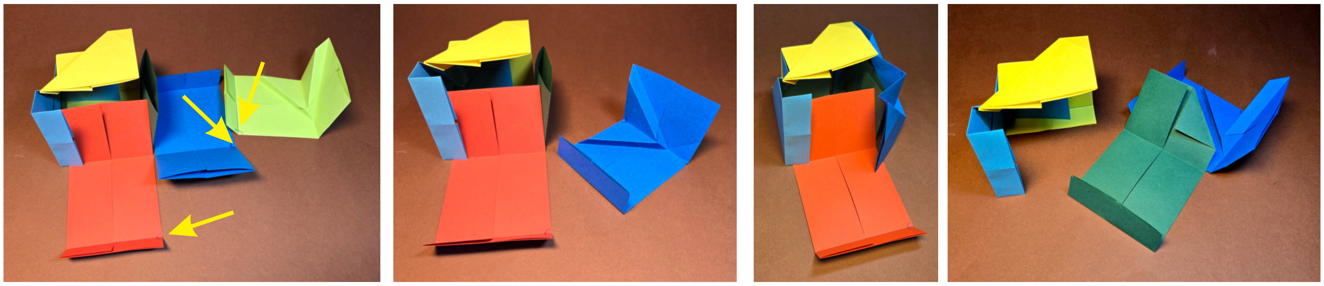
Nun soll unser modifizierter Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge r und ausgestülpter Ecke mit der Tiefe t an der im Bild 11a gekennzeichneten Ecke ebenfalls mit den Werten r und t ein- bzw. ausgestülpt werden. Das Ergebnis ist in den Bildern 11b und c zu sehen.



a b c

Bild 11: Der modifizierte Kolumbuswürfel mit zwei eingestülpten Ecken.

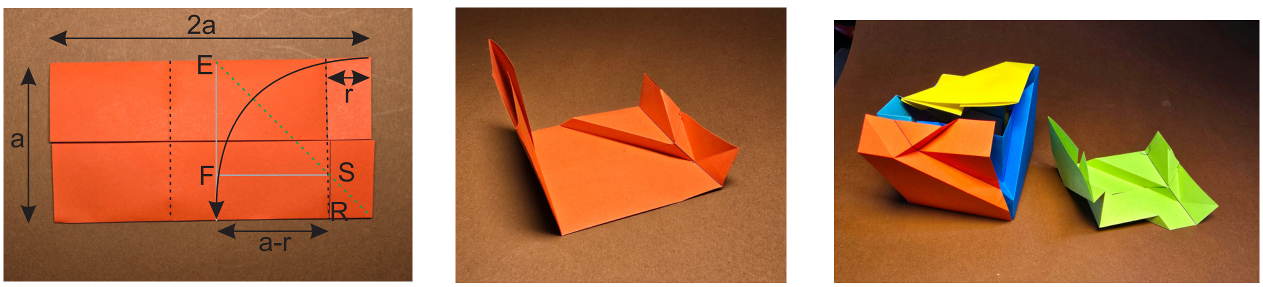
Um das zu erreichen, nehmen wir unseren modifizierten Kolumbuswürfel mit ausgestülpter Ecke auseinander, markieren aber die zu bearbeitende Ecke von innen (Bild 12a). Am einfachsten lässt sich das blaue Modul bearbeiten, indem es genau so gefaltet wird, wie die bisherigen Eckmodule mit den Werten r und t (Bild 12b). Beim Einsetzen dieses Moduls (Bild 12c) bemerken wir, dass es Schwierigkeiten mit dem grünen Modul gibt, das daraufhin angepasst werden muss (Bild 12d).



a b c d

Bild 12: Der modifizierten Kolumbuswürfel mit zwei eingestülpten Ecken.

Nun muss das rote Modul bearbeitet werden. Das ist dahingehend schwierig, da die einzufaltende Ecke an der schmalen Lasche liegt.



a b c

Bild 13: Das rote und das hellgrüne Modul.

Wir gehen dazu wie im Bild 13a vor, um die entsprechende Ecke mit der gegebenen Restkantenlänge r einzustülpen. Dann übertragen wir die ebenfalls gegebene Tiefe t für die Ausstülpung durch abmessen und erhalten das im Bild 13b zu sehende Modul. Anschließend bauen wir dieses Modul ein (Bild 13c).

Nun fehlt noch das hellgrüne Modul, das an der breiteren Lasche bereits ein- und ausgestülpt ist. Das Ein- und Ausstülpen an der schmalen Lasche erfolgt in Analogie zum roten Modul. Das fertige Modul ist bereits im Bild 13c zu sehen. Nach dem Einbau erhalten wir den gewünschten Körper (Bilder 11b und c).

Im Bild 14 sind verschiedene Würfel mit derselben Restkantenlänge, aber verschiedenen Ausstülptiefen zu sehen. Im links liegenden Würfel ragt die ausgstülpte Ecke über die Dreiecksfläche hinaus, im mittleren Würfel liegt sie in dieser Dreiecksfläche und im rechts liegenden Würfel darunter.

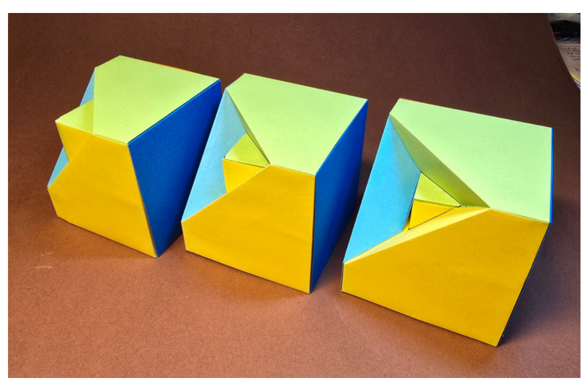
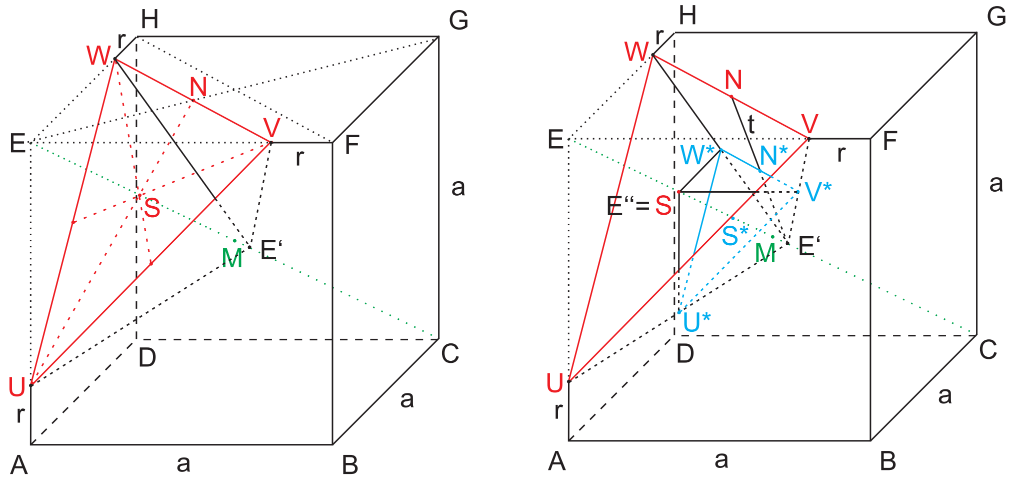


Bild 14: Selbe Restkantenlänge, verschiedene Tiefen der Ausstülpung.

Wir wollen nun die Tiefe t der Ausstülpung so bestimmen, dass, bei gegebener Restkantenlänge r, die ausgestülpte Ecke genau in der Dreiecksfläche liegt. Dazu betrachten wir Bild 15.



a b

Bild 15: Ein- und ausstülpen der Ecke E.

Im Bild 15a wurde die Ecke E mit der Restkantenlänge r eingestülpt. Dabei geht E in E' über und es entsteht das gleichseitige Dreieck UVW, dessen Ecken auf den von E ausgehenden Würfelkanten liegen. E' liegt dabei auf der Raumdiagonalen EC des Würfels. Der Schwerpunkt S des Dreiecks UVW liegt ebenfalls auf EC und halbiert EE'. Weil die Ebene, die durch das Dreieck UVW bestimmt ist, senkrecht zu EC ist, ist E' das Spiegelbild von E an dieser Ebene. Mit N bezeichnen wir noch den Mittelpunkt von VW.

Nun stülpen wir E' so nach außen, dass die ausgestülpte Ecke E'' in der Ebene des Dreiecks UVW zu liegen kommt. Da das Ausstülpen bezüglich der drei Kanten UV, VW und WU mit der selben Tiefe erfolgt, muss die ausgestülpte Ecke in S liegen. Dabei entstehen die Punkte U^*, V^* und W^* (Bild 15b) auf den Verbindungsstrecken von E' mit U, V, W. Die Seiten dieses Dreiecks sind parallel zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks UVW, der Schwerpunkt S^* liegt auf EC und ist der Mittelpunkt $E'E''$. Verbinden wir noch N mit E', dann schneidet diese Verbindung V^*W^* in N^*.
Da S^* der Mittelpunkt von $E'S$ ist, sind U^*, V^*, W^* und N^* die Mittelpunkte der entsprechenden Strecken, die von E' ausgehen. Daher ist die gesuchte Tiefe t der Ausstülpung gleich $|NN^*| = \frac{1}{2}|NE'|$.

Diesen Wert t bestimmen wir nun. Dazu bedenken wir, dass das Dreieck VWE' rechtwinklig bei E' und gleichschenklig mit $|E^1/V| = |E^1/W| = a-r$ ist. Damit ist $|VW| = (a-r)\sqrt{2}$. Weil N der Mittelpunkt von VW ist, muss $|NE'| = \frac{1}{2}\sqrt{2}(a-r)$ gelten.
Damit erhalten wir $t = \frac{1}{2}|NE'| = \frac{1}{4}\sqrt{2}(a-r)$.
Nachdem ein Würfel mit der Restkantenlänge r an einer Ecke (E) eingestülpt und diese Ecke dann mit der Tiefe $t = \frac{1}{4}\sqrt{2}(a-r)$ wieder ausgestülpt wurde, liegt die ausgestülpte Ecke im Schwerpunkt des Dreiecks, welches beim Einstülpen entstanden ist.

Als nächstes sehen wir im Bild 16 einen Ausgangswürfel mit der Kantenlänge a in verschiedenen Lagen, der an allen acht Ecken mit der Restkantenlänge $r = \frac{a}{2}$ eingestülpt und dann mit der Tiefe $t = \frac{1}{8}\sqrt{2}a$ wieder ausgestülpt wurde.

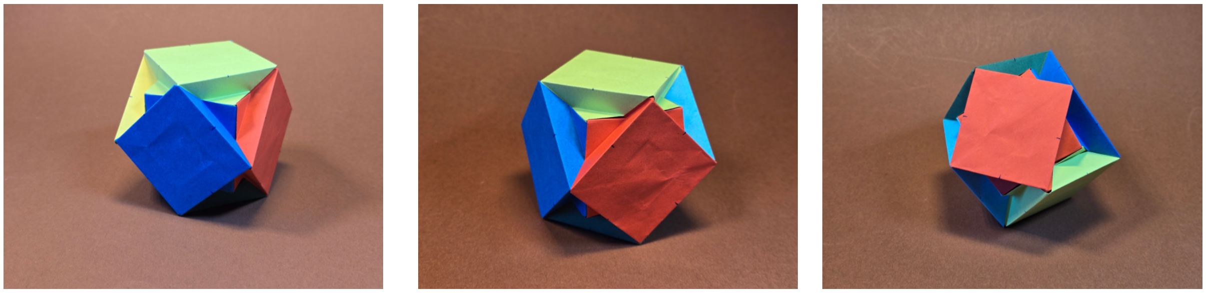
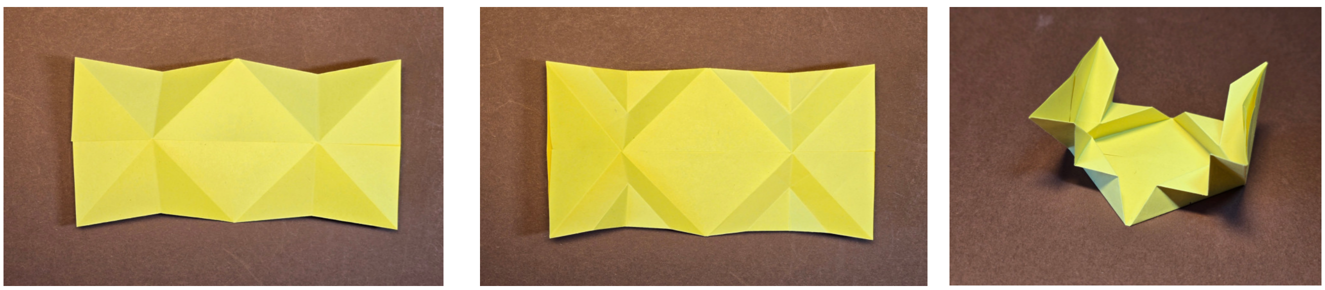


Bild 16: Ausgangskantenlänge a, $r = \frac{a}{2}$, $t = \frac{a}{8}\sqrt{2}$.

Einen Würfel mit acht nach innen gefalteten Ecken haben wir bereits in [2] aus sechs Modulen zusammengesetzt. Dieser Würfel entspricht einem modifizierten Kolumbuswürfel mit der Restkantenlänge $r = \frac{a}{2}$.



a b c

Bild 17: Modul für einen Würfel mit acht ein und wieder ausgestülpten Ecken.

Im Bild 17a ist das zugehörige Modul zu sehen. In dieses Modul müssen wir, nach unseren obigen Überlegungen, nur noch entsprechende Mittelparallelen an den eingefaltenen Ecken falten. Das Ergebnis ist im Bild 17b zu sehen. Bild 17c zeigt schließlich das fertige Modul, in dem die Seiten senkrecht nach oben und die Ecken ein- bzw. ausgefaltet sind. Aus sechs solcher Modulen lässt sich der Körper aus Bild 16 zusammensetzen. Das erfordert aber Ruhe und Geduld und eventuell Hilfsmittel wie Pinzette oder Zahnstocher, um speziell das letzte Modul sauber einzusetzen.

Betrachtet man den fertigen Körper, so hat es den Anschein, dass dem Ausgangswürfel ein kleinerer Würfel einbeschrieben ist. Die Kantenlänge dieses einbeschriebenen Würfels wollen wir nun noch bestimmen.

Dazu betrachten wir unseren Ausgangswürfel (Kantenlänge a), in dem zwei Ecken (E und F) mit der Restkantenlänge $r = \frac{a}{2}$ eingefaltet sind (Bild 18). S_1 und S_2 bezeichnen die Schwerpunkte der dabei entstehenden Dreiecke. Diese beiden Punkte sind aber auch gleichzeitig die Ecken der mit der Tiefe $t = \frac{1}{8}\sqrt{2}a$ wieder ausgefalteten Ecken.
Daher reicht es zur Bestimmung der Kantenlänge des einbeschriebenen Würfels nur die Länge der Strecke S_1S_2 zu bestimmen.
Mit N_1 und N_2 bezeichnen wir die Mittelpunkte der Strecken VW_1 und VW_2. Dann ist auch klar, dass $|N_1N_2| = \frac{a}{2}$ ist.

Nun betrachten wir die Ebene, die durch die Würfelecken A, C, G und E bestimmt ist. U_1, M und M' sind ebenfalls Punkte dieser Ebene.

Weil N_1 auf EG liegt, ist N_1 ebenfalls ein Punkt dieser Ebene und damit auch S_1. Folglich liegen die beiden Geraden $g(U_1N_1)$ und $g(MM')$ in dieser Ebene. Da beide Geraden nicht parallel zueinander sind, schneiden sie sich in einem Punkt P. Aus Symmetriegründen geht dann auch $g(U_2N_2)$ durch diesen Punkt P.

Nun betrachten wir das gleichschenklige Dreieck U_1U_2P, in dem $|U_1U_2| = a$ und $|N_1N_2| = \frac{a}{2}$ ist. Da U_1U_2 und N_1N_2 parallel zueinander sind, ergibt sich aus dem Strahlensatz, dass N_1 und N_2 die Mittelpunkte von PU_1 und PU_2 sind.

Weil S_1 der Schwerpunkt im Dreieck U_1VW_1 ist, folgt $|S_1N_1| = \frac{1}{3}|U_1N_1|$.

Weil auch S_1S_2 parallel zu U_1U_2 ist erhalten wir mit Hilfe des Strahlensatzes

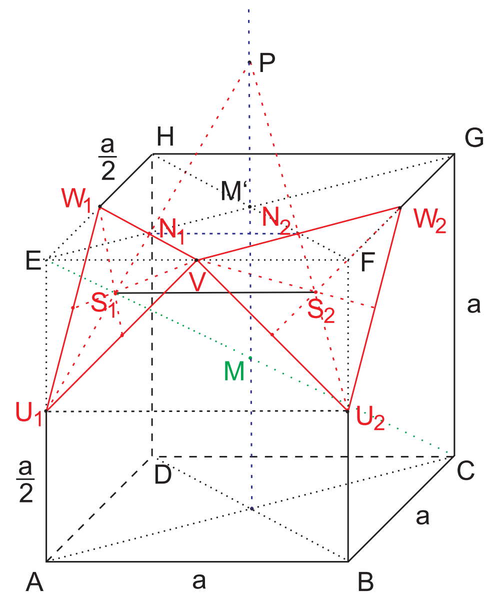


Bild 18: Bestimmung der Kantenlänge des einbeschriebenen Würfels.

$\frac{|S_1S_2|}{|U_1U_2|} = \frac{|PS_1|}{|PU_1|}$, also

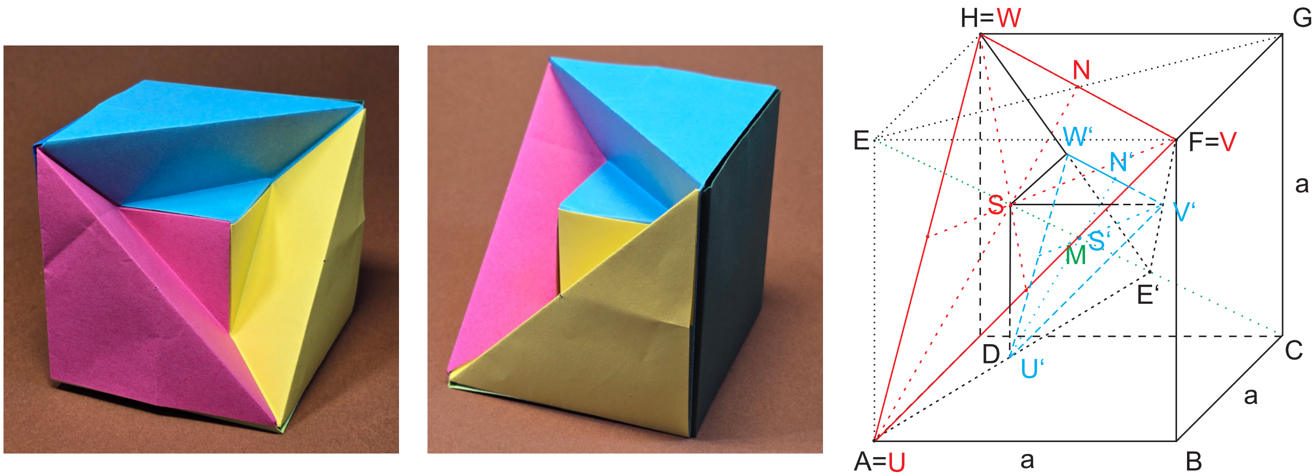
$\frac{|S_1S_2|}{a} = \frac{|PN_1|+|N_1S_1|}{|PU_1|}$, also $\frac{|S_1S_2|}{a} = \frac{|U_1N_1|+\frac{1}{3}|U_1N_1|}{2|U_1N_1|} = \frac{2}{3}$. Damit ist aber $|S_1S_2| = \frac{2}{3}a$ die Seitenlänge des einbeschriebenen Würfels.

Berechnen wir nach (4), Seite 2, das Volumen des Körpers, bei dem alle acht Ecken mit der Restkantenlänge $r = \frac{a}{2}$ ein- und der Tiefe $t = \frac{a}{8}\sqrt{2}$ wieder ausgestülpt wurden, so erhalten wir $V(\frac{a}{2}, \frac{a}{8}\sqrt{2}) = \frac{185}{192}a^3$.
Vom Ausgangswürfel mit der Seitenlänge a fehlt demnach ein Volumen von $\frac{7}{192}a^3$.
Damit können wir aber das Volumen des Körpers, bei dem alle Ecken mit $r = \frac{a}{2}$ und $t = \frac{a}{8}\sqrt{2}$ ein- bzw. ausgestülpt wurden, berechnen. Es ist dann $V = a^3 - 8 \cdot \frac{7}{192}a^3 = \frac{17}{24}a^3$.
Damit hat also der Körper aus Bild 16 das Volumen $\frac{17}{24}a^3$.
Seine Oberfläche beträgt, wie bei all diesen Körpern, $6a^2$.

Zum Abschluss wollen wir noch einen modifizierten Kolumbuswürfel mit $r = 0$ und $t = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ falten. Wegen der Wahl von t liegt die ausgestülpte Ecke im Schwerpunkt des Dreiecks, das beim Einstülpen entsteht. Die Bilder 19a, b zeigen das fertige Ergebnis und Bild 19c das Schrägbild dieses Körpers.

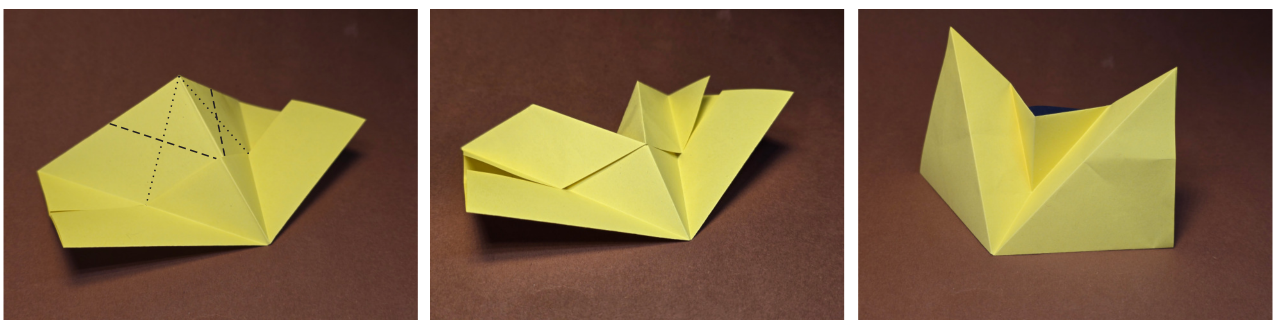
Wir benötigen, wie immer, sechs Module. Jeweils drei dieser Module werden gleich gefaltet.
Die Eckmodule kennen wir bereits aus [3]. Bild 20a zeigt dieses Modul, das für die eingestülpte Ecke mit der Restkantenlänge $r = 0$ genutzt wird. In diesem Bild sind die beiden zusätzlichen Faltkanten eingezeichnet, die das Ausstülpen der Ecke mit dem geforderten t ermöglichen. Diese beiden Faltlinien sind die Mittelsenkrechten auf der jeweiligen eingezeichneten Dreieckshöhe. Sie lassen sich leicht falten.
Die Bilder 20b und c zeigen das fertige Modul mit $r = 0$ und $t = \frac{a}{4}\sqrt{2}$. Von diesem Modul benötigen wir drei Stück, die anschließend ineinander geflochten werden.
Die anderen drei Module sind die normalen Würfelmodule.

Damit sie sich gut einsetzen lassen, müssen sie so geändert werden, wie es im Bild 21 zu sehen ist.



a b c

Bild 19: Körper mit $r = 0$ und $t = \frac{1}{4}\sqrt{2}a$.



a b c

Bild 20: Das Modul für die ein- und ausgestülpte Ecke.

Diese drei Module lassen sich nun leicht einsetzen, sodass der gewünschte Körper aus Bild 19 entsteht.
Sein Volumen lässt sich leicht mit Hilfe von (4) berechnen. Wir erhalten $V(0, \frac{a}{4}\sqrt{2}) = \frac{17}{24}a^3$. Die Oberfläche ist wieder $6a^2$.
Damit hat dieser Körper dasselbe Volumen wie der Körper aus Bild 16 mit den acht ein- bzw. ausgestülpten Ecken mit $r = \frac{a}{2}$ und $t = \frac{a}{8}\sqrt{2}$.

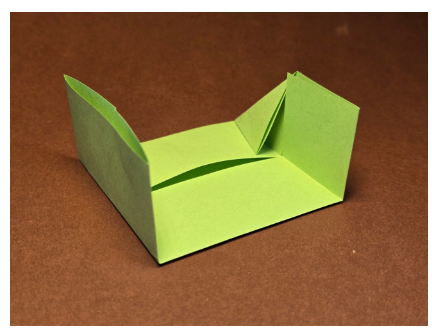


Bild 21: Das veränderte Flächenmodul.

Wir gehen noch einer Vermutung nach, die sich aus Bild 19c ergibt. Dort sieht es so aus, dass der Schwerpunkt S' der Dreiecks $U'V'W'$ mit dem Mittelpunkt M der Raumdiagonalen EC zusammenfällt.
Um dies zu überprüfen, berechnen wir zuerst die Länge der Höhe h_1 im gleichseitigen Dreieck UVW, dessen Seitenlänge $a\sqrt{2}$ ist. Für h_1 gilt dann mit dem Satz des Pythagoras $h_1^2 = (a\sqrt{2})^2 - (\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{6}{4}a^2$, also $h_1 = \frac{a}{2}\sqrt{6}$.

Damit erhalten wir für $|ES|^2 = |EU|^2 - |US|^2 = a^2 - (\frac{2}{3}h_1)^2 = a^2 - (\frac{a}{3}\sqrt{6})^2 = \frac{3}{9}a^2$. Folglich ist $|ES| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.
Nun können wir $|ES'|$ bestimmen.
Da $|ES| = |SE'|$ und S' der Mittelpunkt von SE' ist, ist $|ES'| = |ES| + \frac{1}{2}|SE'| = \frac{3}{2}|SE| = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Damit ist $|ES'| = \frac{1}{2}|EC|$ und S' fällt tatsächlich mit M zusammen. Damit liegt M auch in der zu EC senkrechte Ebene durch $U'V'W'$.

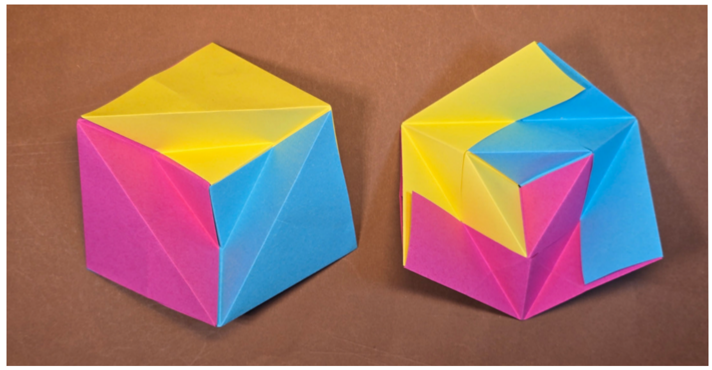


Bild 22: Zwei Ecken aus jeweils drei Modulen.

Folglich lassen sich zwei gegenüber liegende Ecken (E und C) eines Würfels mit der Kantenlänge a jeweils mit $r = 0$ und $t = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ ein- bzw. ausstülpen. Dabei fallen die beiden Ebenen, die durch das Ausstülpen bestimmt sind, zusammen und gehen durch M.
Die zugehörigen Dreiecke sind aber gegeneinander verdreht.
Um diesen Körper zu bauen, brauchen wir sechs gleiche Module, so wie sie im Bild 20 zu sehen sind. Jeweils drei dieser Module werden miteinander verflochten, sodass Würfelecken mit $r = 0$ und $t = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ entstehen. Im Bild 22 sind diese beiden Würfelecken zu sehen, eine von außen, die andere von innen.
Leider lassen sich die beiden Würfelecken nicht ohne Weiteres verbinden. Wir benötigen dazu Kantenscharniere um die beiden Teile zusammenzusetzen. Die Faltfolge zeigt das folgende Bild 23.

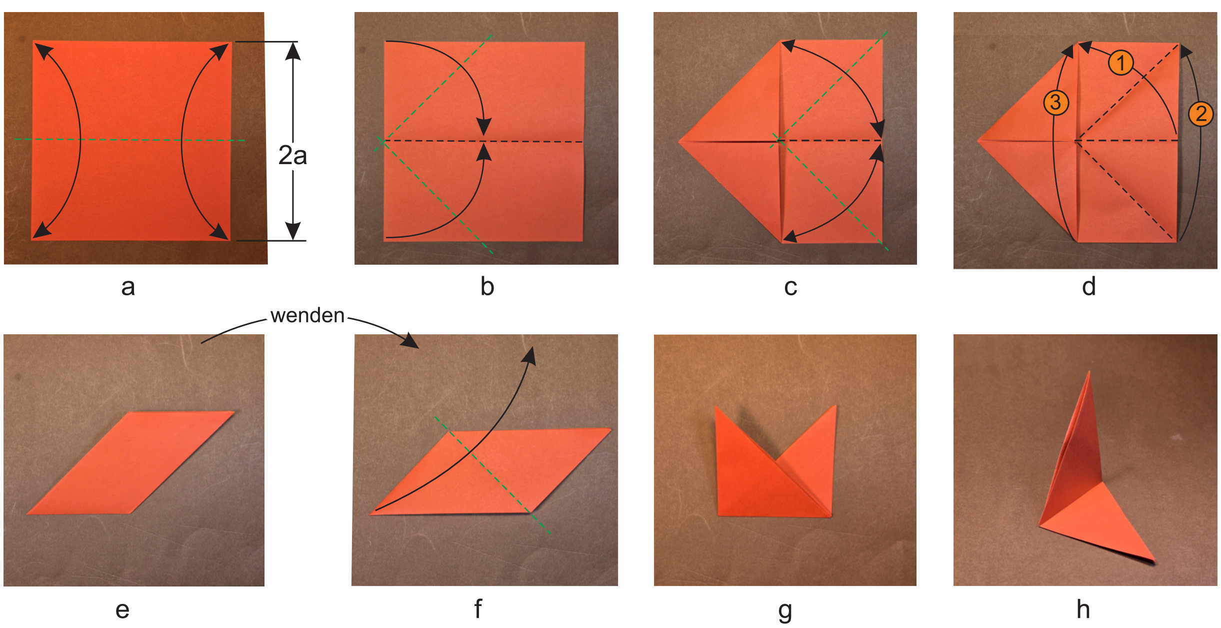
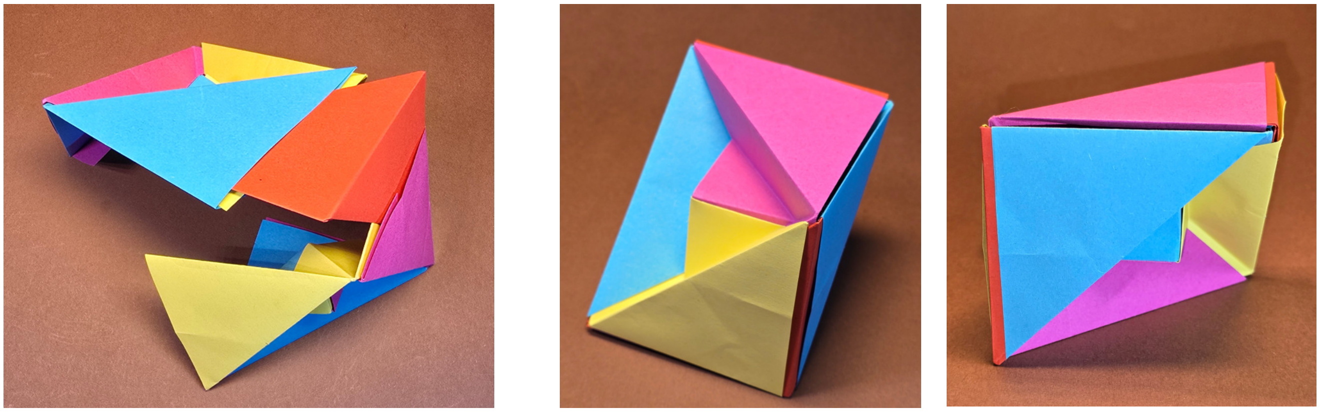


Bild 23: Faltfolge für das Kantenscharnier.

Von diesen Kantenscharnieren benötigen wir drei Stück, um drei Kanten paarweise zu verbinden. Drei weitere Kanten bleiben offen.



a b c

Bild 24: Der Zusammenbau des Körpers.

Bild 24a zeigt wie die beiden Würfelecken an einer Kante mit einem Kantenscharnier verbunden werden. An beiden Würfelecken sind die zu verbindenden Kanten mit jeweils einer Tasche versehen, in die das Kantenscharnier eingepasst wird.
Die Bilder 24b und c zeigen den fertigen Körper.

In Analogie zu oben berechnen wir das Volumen dieses Körpers, indem wir zuerst das Restvolumen von einem modifizierten Kolumbuswürfel mit einer (mit $r = 0$ und $t = \frac{a}{4}\sqrt{2}$) veränderten Ecke bezüglich des kompletten Würfels der Seitenlänge a ausrechnen. Mit Hilfe von (4) ergibt sich $V_{Rest} = a^3 - V(0, \frac{a}{4}\sqrt{2})$.
Dann ist das Volumen V des betrachteten Körpers $V = a^3 - 2V_{Rest} = a^3 - 2(a^3 - V(0, \frac{a}{4}\sqrt{2}))$, also
$V = 2V(0, \frac{a}{4}\sqrt{2}) - a^3 = 2 \cdot \frac{17}{24}a^3 = \frac{5}{12}a^3$.
Die Oberfläche dieses Körpers beträgt natürlich wieder $6a^2$. Damit beenden wir unsere Betrachtungen zum modifizierten Kolumbuswürfel mit ausgestülpter Ecke.
Zu den beiden zuletzt gefalteten Körpern gibt es auf YouTube (https://www.youtube.com/@mathegami7706) jeweils ein kurzes Video.

Literatur

[1] Schmitz, M.: *Vom Quadrat zum Würfel.* Mathegami, 2009.

[2] Schmitz, M.: *Der Kolumbus-Würfel.* Mathegami, 2009.

[3] Schmitz, M.: *Der modifizierte Kolumbuswürfel.* Mathegami, 2025.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele.

Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir gern eine E-Mail (mathegami@web.de).