# MATHEGAMI
## Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de August 2010


# Würfel-Pyramide-Rhombendodekaeder

Michael Schmitz


**Zusammenfassung**

In diesem kleinen Beitrag beginnen wir mit dem Falten eines Moduls für einen Würfel nach Mitsunobu Sonobe. Aus diesem Modul entwickeln wir ein Modul für eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche. Modifikationen dieses Moduls führen uns zu quadratischen Pyramiden mit verschiedenen Höhen.

Dabei finden wir auch eine Pyramide, deren Höhe der halben Kantenlänge des Grundquadrates entspricht, sodass sich mit sechs kongruenten Exemplaren dieser ein Würfel zusammensetzen lässt. Durch "Umstülpen" dieses Würfels kommen wir zum Rhombendodekaeder.

In diesem Beitrag wird besonderer Wert auf die Entwicklung eines Moduls zum Bau von Pyramiden gelegt. Es wird nicht nur die Faltanleitung angegeben, sondern auch der Weg dorthin steht im Mittelpunkt der Betrachtungen.


Wir beginnen damit, ein Würfelmodul von Mitsunobu Sonobe (vgl. [4]) zu falten. Die Faltanleitung ist dem Bild 1 zu entnehmen.

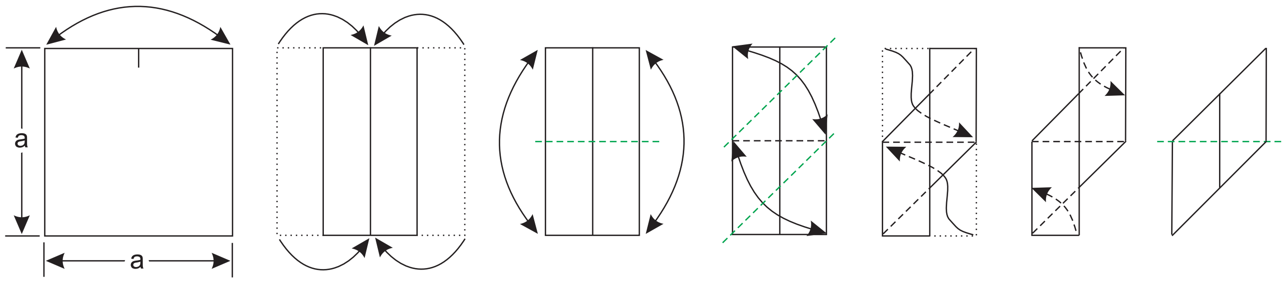



Bild 1a Bild 1b Bild 1c Bild 1d Bild 1e Bild 1f Bild 1g

Im Bild 1e ist angedeutet, dass die beiden umgefalteten Dreiecke jeweils unter die gegenüberliegenden Rechtecke geschoben werden. Haben wir das Modul bis Bild 1g gefaltet, so gibt es zwei Möglichkeiten der Fortsetzung: Wir falten entlang der eingezeichneten Faltlinie entweder nach vorn oder nach hinten.

Hier sollen beide Varianten gezeigt werden. Zuerst falten wir nach vorn und fertigen weitere fünf dieser Module an. Vier von diesen werden entsprechend der Bildfolge aus Bild 2 zusammengesetzt. Dabei liegen die "Steckverbindungen" dann im Inneren des Würfels. Die restlichen beiden Module werden analog eingefügt, sodass der Würfel aus Bild 3a entsteht.

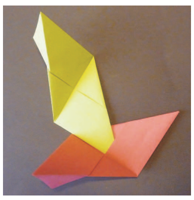


Bild 2a

Bild 2b

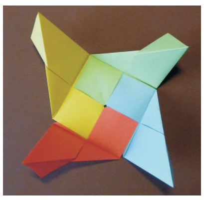


Bild 2c

Bild 3a

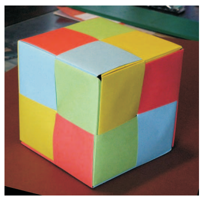


Bild 3b

Fertigen wir sechs weitere Module entsprechend der Faltanleitung aus Bild 1 an und falten alle entsprechend der im Bild 1g eingezeichneten Faltlinie nach hinten, so können wir auch einen Würfel zusammensetzen. Jetzt liegen allerdings die “Steckverbindungen” außerhalb der Würfels. Der fertige Würfel ist im Bild 3b zu sehen.

Beide Würfel gehen durch “Umstülpen” auseinander hervor, das Innere des einen Würfels ist das Äußere des anderen.

Gehen wir für beide Würfel von einem quadratischen Faltpapier mit der Kantenlänge $a$ aus, so haben beide Würfel jeweils die Kantenlänge $\frac{a}{2}$. Folglich beträgt das Volumen der Würfel $V_W = \frac{1}{8}a^3$.

Dieses Ergebnis steht mit unserer Erfahrung im Einklang, dass ein Würfel mit der Kantenlänge $a$ in acht kongruente Würfel, jeweils mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$, zerlegt werden kann. Fertigen wir acht solche Würfel mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$ an, so können wir diese auch praktisch zu einem großen Würfel mit der Kantenlänge $a$ zusammenlegen.

Beim Zusammenbau der ersten vier Würfelmodule (Bild 2c) fällt uns eine quadratische Grundfläche auf, an der vier Dreiecke anschließen. Diese vier Dreiecke lassen sich aber nicht zu einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche aufrichten. Wir können dies aber erreichen, indem wir die quadratische Grundfläche zusammengesteckt lassen, aber die daran anschließenden Dreiecke entfalten, sodass Rechtecke entstehen (Bild 4). Nun werden diese Rechtecke zu gleichschenkligen Dreiecken, deren Basis eine Kante der quadratischen Grundfläche ist, gefaltet. Dies ist im Bild 5a für ein Modul dargestellt. Nun lassen sich die vier Dreiecke zu einer geraden quadratischen Pyramide aufrichten. Diese Dreiecke halten aber noch nicht zusammen, da sie untereinander noch nicht verankert sind. Dies können wir erreichen, indem wir eines der am gleichschenkligen Dreieck überstehenden Dreiecke in eine Tasche verwandeln und das andere als Lasche benutzen. Das Vorgehen wird wieder nur für ein Modul in den Bildern 5b bis 5d gezeigt. Wir müssen darauf achten, dass alle vier Module gleich behandelt werden, damit am Ende alles gut zusammenpasst. Bild 5b zeigt, wie das linke Dreieck zu einer Tasche nach innen gefaltet wird. Die zugehörigen Faltlinien sind bereits vorhanden, müssen nur entgegengesetzt gefaltet werden. Im Bild 5c ist zu sehen, wie das kleine überstehende Dreieck unter dem gegenüberliegenden Rechteck verschwindet. Nun wird das rechte Dreieck, die Lasche, noch einmal über das gleichschenklige Dreieck und der überstehende Rest nach hinten gefaltet. Dann wird die Lasche wieder aufgefaltet und das Ergebnis ist im Bild 5d zu sehen. Nachdem die quadratische Grundfläche wieder zusammengefügt wurde (Bild 5e), können nun die Dreiecke nach oben aufgerichtet und untereinander verbunden werden. Die fertige Pyramide ist im Bild 6 zu sehen.

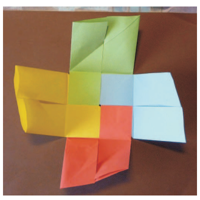


Bild 4

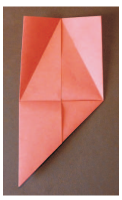


Bild 5a

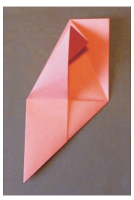


Bild 5b

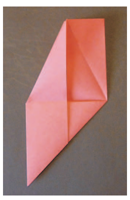


Bild 5c

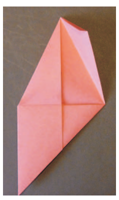


Bild 5d

Bild 5e

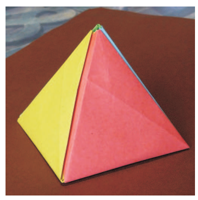


Bild 6

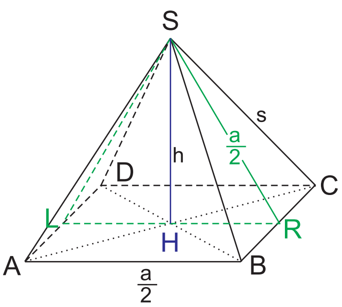



Bild 7

Diese Pyramide hat eine besondere Eigenschaft, die wir erkennen, wenn wir beachten, dass sowohl die Höhe der dreieckigen Seitenflächen der Pyramide als auch die Kanten der quadratischen Grundfläche die Länge $\frac{a}{2}$ haben. Betrachten wir nämlich die in Bild 7 dargestellte Pyramide, so sehen wir, dass das Dreieck $LRS$ gleichseitig ist und die Seitenlänge $\frac{a}{2}$ hat. Folglich hat der Neigungswinkel der Seitenflächen der Pyramide gegenüber der Grundfläche eine Größe von $60^0$. Auch die Neigungswinkel zweier gegenüberliegender Seitenflächen hat eine Größe von $60^0$.

Damit können wir sechs solche Pyramiden “Seite an Seite” um die Spitze $S$ oder um eine Kante der Grundfläche zu einem Ring zusammenlegen. Die Bilder 8a und 8b zeigen beide Möglichkeiten. (Etwas Klebeband hilft beim Zusammenhalten der sechs Pyramiden.)

Nun bestimmen wir noch die Höhe $h$ der Pyramide im Dreieck SHR (Bild 7). Nach dem Satz des Pythagoras erhalten wir $h^2 = (\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{4})^2$, also $h = \frac{a}{4}\sqrt{3}$. Damit können wir auch das Volumen der Pyramide berechnen: $V_P = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}(\frac{a}{2})^2 \cdot \frac{a}{4}\sqrt{3}$, also $V_P = \frac{a^3}{48}\sqrt{3}$.

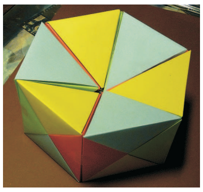


Bild 8a

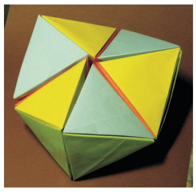


Bild 8b

Abschließend berechnen wir noch die Länge $s$ der Pyramidenkanten von der Spitze $S$ zu eine Ecke der Grundfläche. Wir erhalten im Dreieck $SHC$: $s^2 = h^2 + (\frac{|AC|}{2})^2 = (\frac{a}{4}\sqrt{3})^2 + (\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 = \frac{5}{16}a^2$, also $s = \frac{a}{4}\sqrt{5}$.

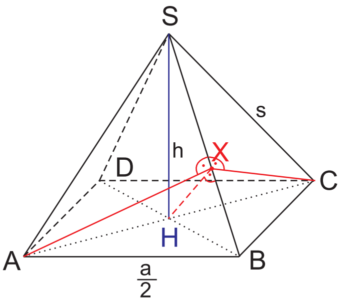



Bild 9

Als nächstes bestimmen wir die Größe des Neigungswinkels zweier Seitenflächen der Pyramide, die eine gemeinsame Kante haben. Wir betrachten dazu die beiden Seitenflächen $ABS$ und $BCS$. Von $A$ fällen wir das Lot auf $BS$ und bezeichnen den Lotfußpunkt mit $X$ (Bild 9). Da sich das Dreieck $ABS$ um $BS$ so drehen lässt, dass $A$ nach $C$ geht, ist auch $CX$ senkrecht zu $BS$. Um den gesuchten Neigungswinkel zu bestimmen, müssen wir die Größe des Winkels $\sphericalangle AXC$ bestimmen.

Da $AX$ und $CX$ senkrecht auf $BS$ ist, ist auch die durch $A$, $C$ und $X$ bestimmte Ebene senkrecht zu $BS$. Folglich ist auch $HX$ senkrecht auf $BS$ und wir können $|BX|$ mit Hilfe des Kathetensatzes im rechtwinkligen Dreieck $SHB$ bestimmen: $|HB|^2 = |BX| \cdot |BS|$, also $|BX| = \frac{|HB|^2}{s} = \frac{a^2}{8s} = \frac{a}{10}\sqrt{5}$.

Damit können wir im rechtwinkligen Dreieck $ABX$ die Länge von $AX$ berechnen: $|AX|^2 = |AB|^2 - |BX|^2 = (\frac{a}{2})^2 - (\frac{a}{10}\sqrt{5})^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{20} = \frac{a^2}{5}$, also $|AX| = \frac{a}{5}\sqrt{5}$ und damit auch $|CX| = \frac{a}{5}\sqrt{5}$.

Nun können wir mit Hilfe des Kosinussatzes die Größe $\varphi$ des gesuchten Winkels im Dreieck $ACX$ bestimmen: $|AC|^2 = |AX|^2 + |CX|^2 - 2 \cdot |AX| \cdot |CX| \cdot cos\varphi$. Wir erhalten mit den bisher berechneten Werten: $(\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 = \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{5} - 2 \cdot \frac{a^2}{5} \cdot cos\varphi$ woraus $cos\varphi = -\frac{1}{4}$, also $\varphi \approx 104,48^0$ folgt.

Damit ist klar, dass diese Pyramide kein "Raumfüller" ist.

Die eben gefaltete Pyramide verwenden wir zum Bau eines neuen Körpers. Unsere Pyramide hat nämlich die Eigenschaft, dass ihre Grundfläche zu den Seitenflächen des Ausgangswürfels kongruent ist. Daher können wir sechs solche Pyramiden auf die Seitenflächen der Würfels setzen, wodurch ein neuer, sternförmiger Körper entsteht. Im Bild 10a sehen wir drei auf den Würfel aufgesetzte Pyramiden. Wir sehen, dass an einer Würfelkante zwei Seitenflächen von Pyramiden zusammentreffen. Daher müsste es möglich sein, diesen sternförmigen Körper direkt aus Modulen aufzubauen. Diese Module entstehen aus dem bisher gefalteten Pyramidenmodul (Bild 5a bis 5d). Wir müssen nur die untere Hälfte, die bisher die Grundfläche der Pyramide ergab, so wie die obere Hälfte falten, die dann ein weiteres Dreieck ergibt. Dieses Modul ist im Bild 10b gezeigt. Nun können wir aus 12 solchen Modulen den sternförmigen Körper zusammenstecken. Bild 10c zeigt den fertigen Körper, der von 24 kongruenten gleichschenkligen Dreiecken begrenzt wird.

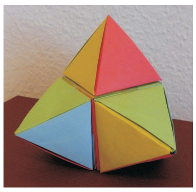


Bild 10a

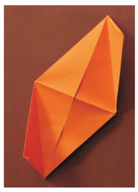


Bild 10b

Bild 10c

Als nächstes stellen wir uns die Frage, ob wir – in ähnlicher Weise wie oben – auch Pyramiden herstellen können, die eine andere Höhe haben. Dazu müssen wir das quadratische Faltpapier durch rechteckiges ersetzen. Beachten müssen wir, dass im unteren Teil die Faltung aus Bild 5a bis d erhalten bleibt, damit sich die quadratische Pyramidengrundfläche bilden lässt.

In den Bildern 11a bis 11j ist die Faltanleitung für ein DIN A5 Blatt gezeigt.

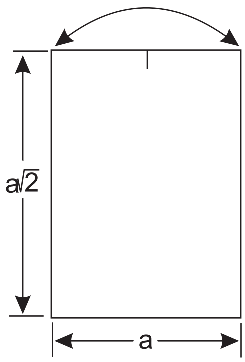



Bild 11a

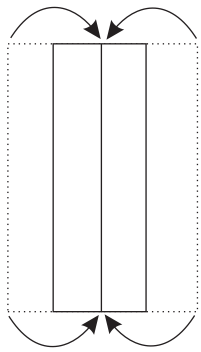


Bild 11b

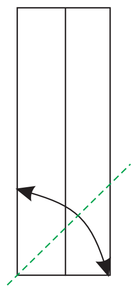


Bild 11c

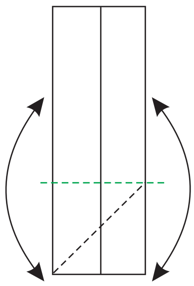


Bild 11d

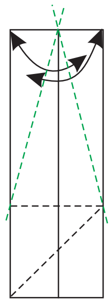


Bild 11e

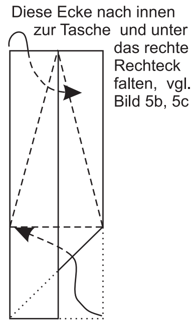



Bild 11f

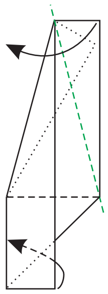


Bild 11g

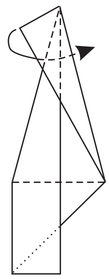


Bild 11h

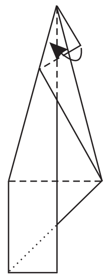


Bild 11i

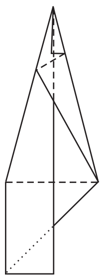


Bild 11j

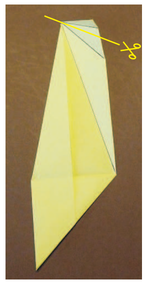


Bild 11k

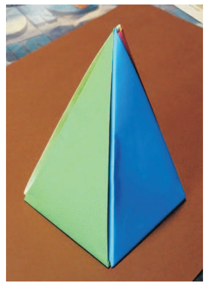


Bild 11m

Nachdem wir die Faltung bis Bild 11j durchgeführt haben, falten wir die Lasche wieder auseinander. Bild 11k zeigt ein Foto des fertig gefalteten Moduls. Wir schneiden noch oben an der Lasche einen Teil entsprechend der Markierung ab, damit das Zusammenstecken der dreieckigen Seitenflächen möglich wird. Bild 11m zeigt die fertige Pyramide.

Natürlich können wir hier auch das Volumen dieser Pyramide, Neigungswinkel von Flächen, ... berechnen. Aber vielleicht ist es wichtiger, dieses Modul von den Schülern selbst entwickeln zu lassen.

Die Faltanleitung aus Bild 11a bis 11j eignet sich natürlich auch für andere Rechteckformate. Lediglich bei den Laschen müssen wir beachten, dass die Module gut zusammenpassen.

Wir setzen mit einer weiteren Pyramide fort. Dazu betrachten wir in einem Würfel (Bild 12a) die Raumdiagonalen. Dadurch wird der Würfel in sechs kongruente Pyramiden eingeteilt. Eine diese Pyramiden ist im Bild 12b dargestellt. Da sechs dieser Pyramiden zu einem Würfel zusammengesetzt werden können und mit Würfeln der Raum schlicht und lückenlos ausgefüllt werden kann, ist diese Pyramide auch ein "Raumfüller", im Gegensatz zu der am Anfang betrachteten Pyramide.

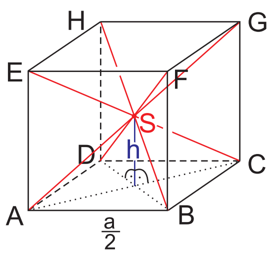



Bild 12a

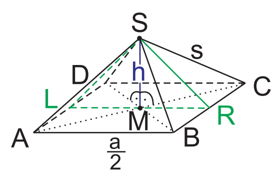



Bild 12b

Wir wollen im Folgendem auch diese Pyramide aus gefalteten Modulen herstellen und dann mit sechs solcher Pyramiden einen Würfel zusammensetzen. Dazu müssen wir uns zuerst überlegen, wie groß das rechteckige Faltpapier sein muss, das entsprechend der obigen Beschreibung des Pyramidenmoduls gebraucht wird. Da die Länge der Grundkante der zu bauenden Pyramide wieder $\frac{a}{2}$ sein soll, muss das rechteckige Faltpapier die Breite $a$ haben. Die Höhe dieses Rechtecks setzt sich aus zwei Teilen zusammen: Der untere Teil, aus dem dann die Grundfläche der Pyramide entstehen soll, muss die Höhe $\frac{a}{2}$ haben. Der obere Teil, der dann eine Seitenfläche der Pyramide bildet, hat die Höhe $|SR|$ (Bild 12b). Dies entspricht der Länge der Höhe einer Seitenfläche der Pyramide.

Wir berechnen zuerst diese Höhe. Dazu benutzen wir die Bezeichnungen aus Bild 12b. Da die Pyramide durch die Raumdiagonalen des Würfels (Bild 12a) gebildet wird, ist sofort klar, dass für die Höhe der

Pyramide $h = \frac{a}{4}$ gilt. Im rechtwinkligen Dreieck $SMR$ berechnen wir $|RS|^2 = h^2 + |MR|^2 = (\frac{a}{4})^2 + (\frac{a}{4})^2$, also $|RS| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$.

Weil $\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\sqrt{2} \approx 0,85a < a$ ist, können wir mit quadratischem Faltpapier der Kantenlänge $a$ beginnen, das wir in einer Richtung auf die Kantenlänge $(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})\frac{a}{2}$ kürzen, wie es im Bild 13 gezeigt ist.

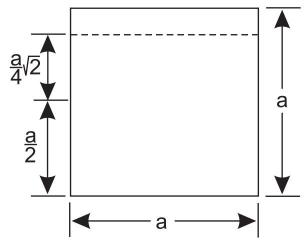


Bild 13

Nun falten wir entsprechend der Überlegungen von oben. Die entsprechende Faltreihenfolge ist in den Bildern 14a bis 14g dargestellt. Bild 14h zeigt das fertige Modul und Bild 14i die aus vier Modulen zusammengesetze Pyramide.

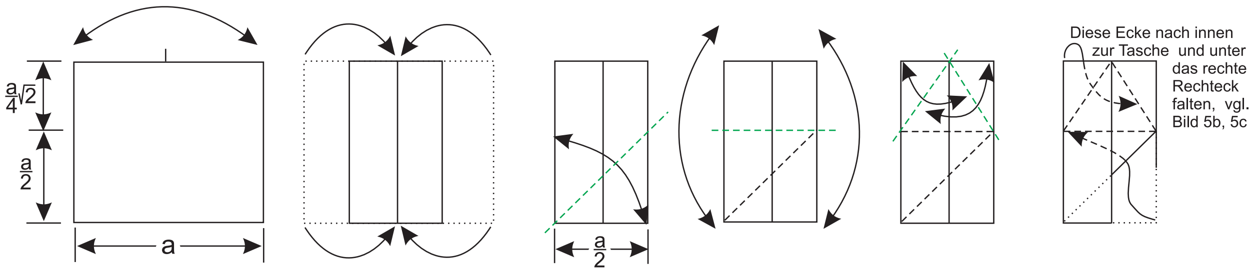


Bild 14a Bild 14b Bild 14c Bild 14d Bild 14e Bild 14f

Wir müssen allerdings darauf hinweisen, dass bei dieser Pyramide die Seitenflächen nicht so gut zusammenhalten, wie bei der vorhergehenden. Das liegt daran, dass sich die Pyramidenmodule nicht so gut ineinander verankern. Etwas Klebestreifen hilft bei diesem Problem.

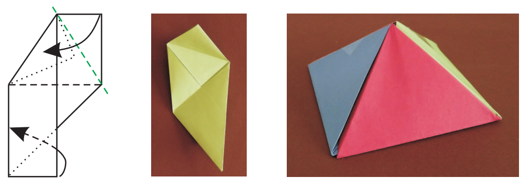


Bild 14g Bild 14h Bild 14i

Um aus einem quadratischen Faltpapier mit der Kantenlänge $a$ ein Rechteck zu machen, bei dem ein Paar paralleler Kanten die Länge $(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2})\frac{a}{2}$ hat, genügt es für unsere Faltarbeiten einfach $0,85a$ auszurechen und dies auf das quadratische Faltpapier zu übertragen.

Aber natürlich wollen wir auch wissen, wie wir dies allein durch Falten erreichen können.

Gehen wir also von einem quadratischen Faltpapier $ABCD$ mit der Kantenlänge $a$ aus (Bild 15a), dann ist die Frage, wie wir die Linie $EF$ durch Falten bestimmen können, sodass die in Bild 15a gezeigten Maße entstehen.

Dabei bezeichnen $N$, $G$ und $H$ die Mittelpunkte der entsprechenden Seiten. Die Punkte $E$ und $F$ sind gesucht, sodass $EF||GH$ und $|HF| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ ist.

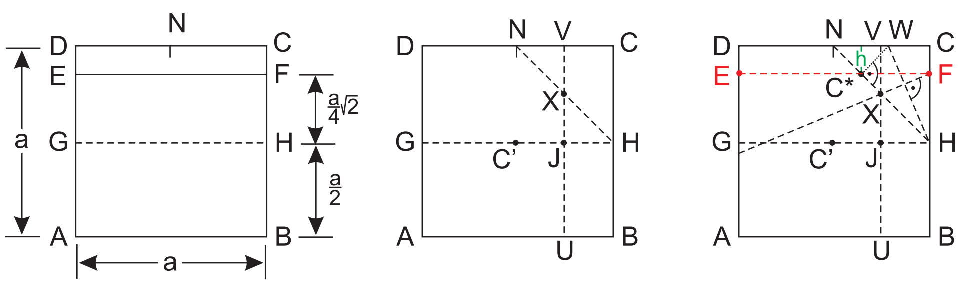


Bild 15a Bild 15b Bild 15c

Die Grundidee ist schnell gefunden: Eine Strecke der Länge $\frac{a}{4}\sqrt{2}$ kann aufgefasst werden als eine Diagonale in einem Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{4}$.

Ein solches Quadrat lässt sich im Ausgangsquadrat leicht erzeugen. Dazu falten wir $C$ auf $N$, wodurch die Faltlinie $UV$ entsteht (Bild 15b).

Nun falten wir $C$ auf $GH$, sodass die Faltlinie durch $H$ geht, $C'$ ist dabei der Bildpunkt von $C$ beim Falten. Diese Faltline geht natürlich auch durch $N$, und $C'$ ist der Mittelpunkt des Quadrates.

Die Faltlinie $UV$ schneidet die Faltlinie $HN$ im Punkt $X$ und die Faltlinie $GH$ in $J$. Weil $HJX$ ein bei $J$ rechtwinkliges gleichschenkliges Dreieck mit der Kathetenlänge $\frac{a}{4}$ ist, folgt $|HX| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$.

Nun müssen wir nur noch $HX$ auf $HC$ von $H$ aus übertragen. Dies können wir aber leicht mit einer Spiegelung an der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle CHN$ erreichen. Dazu falten wir $C$ so auf $HN$, dass die Faltline durch $H$ geht (Bilde 15c). $C^*$ ist der zugehörige Bildpunkt. Mit $W$ bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser Faltline mit $CD$. Nun müssen wir nur noch durch $X$ so falten, dass $W$ auf $HW$ zu liegen kommt. Diese Faltlinie schneidet $BC$ im gesuchten Punkt $F$.

Abschließend falten wir $C$ auf $BF$, sodass die Faltlinie durch $F$ geht. Auf diese Weise entsteht auf $AD$ der Punkt $E$. Jetzt können wir das quadratische Ausgangspapier entlang $EF$ kürzen und erhalten das passende, rechteckige Faltpapier für das Pyramidenmodul.

Beim Einzeichnen der Strecke $EF$ fällt uns auf, dass diese Strecke scheinbar durch $C^*$ geht. Falls unsere Vermutung richtig ist, verkürzt sich unsere Faltanleitung zur Bestimmung der Strecke $EF$ erheblich. Diese Vermutung werden wir jetzt überprüfen, indem wir von $C^*$ das Lot auf $CD$ fällen und dessen Länge $h$ bestimmen. Diese Länge muss dann mit $|FC| = a - \frac{a}{4}\sqrt{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{4}(2 - \sqrt{2})$ verglichen werden.

Zur Bestimmung von $h$ betrachten wir das Dreieck $NC^*W$. Dieses Dreieck ist bei $C^*$ rechtwinklig und wegen $|\sphericalangle CHN| = 45^0$ ist auch $|\sphericalangle C^*NW| = 45^0$. Damit ist das Dreieck $NC^*W$ gleichschenklig mit $|C^*N| = |C^*W| = r$. Wegen der Faltung von $C$ nach $C^*$ ist auch $|CW| = r$. Mit dem Satz des Pythagoras erhalten wir im Dreieck $NC^*W$: $r^2 + r^2 = (\frac{a}{2} - r)^2$.

Daraus ergibt sich eine quadratische Gleichung für $r$: $r^2 + ar - \frac{a^2}{4} = 0$. Diese Gleichung hat die beiden Lösungen $r_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}$. Da $r$ positiv ist, entfällt die negative Lösung der quadratischen Ausgangsgleichung und wir erhalten $r = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{2} = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{2})$.

Nun können wir $h$ berechnen. Weil $NC^*W$ ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ist, können wir dieses als ein halbes Quadrat auffassen, in dem $NW$ eine Diagonale ist. Dann ist $h$ die halbe Länge der anderen Diagonale dieses Quadrates. Es gilt demzufolge $h = \frac{1}{2}r\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{2})\sqrt{2} = \frac{a}{4}(2 - \sqrt{2}) = |FC|$. Damit stimmt tatsächlich $h$ mit $FC$ überein und unsere Vermutung ist bewiesen. Damit können wir die Linie $EF$ in unserem quadratischen Faltpapier schneller bestimmen: Zuerst wird die Linie $HN$ gefaltet (Bild 15a). Anschließend falten wir $C$ so auf $HN$, dass die Faltlinie durch $H$ geht. Dabei entsteht auf $HN$ der Punkt $C^*$. Nun falten wir $CD$ so parallel um, dass die Faltline durch $C^*$ geht, womit wir die gesuchte Linie $EF$ schon gefunden haben.

Betrachten wir noch einmal Bild 15c und davon das rechte obere Viertel $C'HCN$ vergrößert im Bild 15d. $C'HCN$ ist natürlich ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$. Bezeichnen wir nun noch den Fußpunkt des Lotes von $C^*$ auf $CN$ mit $Z$ und den Schnittpunkt von $FC^*$ und $NC'$ mit $Y$, dann sind die beiden Dreiecke $YC^*Z$ und $ZNC^*$ kongruent zueinander. Beide Dreiecke stimmen in $NC^*$ und den beiden dort anliegenden Winkeln überein. Folglich ist auch $|YC^*| = h$. Das heißt: Falten wir eine Ecke (hier $C$) eines Quadrates mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ auf die gegenüberliegende Diagonale (hier $HN$), so hat die umgefaltete Ecke (hier $C^*$) von zwei Quadratkanten, die sich in einem Endpunkt der betrachteten Diagonale treffen, jeweils gleichen Abstand. Der kürzere dieser beiden Abstände ist unser gesuchter Abstand $h$.

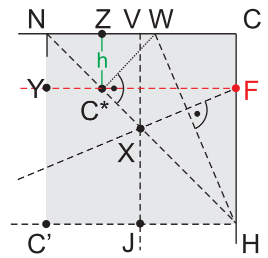


Bild 15d

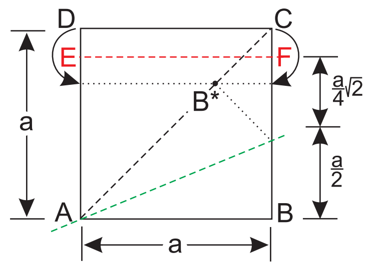


Bild 16

Übertragen wir diese Überlegung (Streckung mit dem Faktor 2) auf unser Ausgangsquadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge $a$ (Bild 16) und falten $B$ auf die Diagonale $AC$. Dann hat der Bildpunkt $B^*$ von $B$ auf $AC$ insbesondere von $CD$ den Abstand $2h$. Wir müssen also nur noch $CD$ parallel so umfalten, dass die umgefaltete Kante durch $B^*$ geht. Die zugehörige Faltlinie ist unsere gesuchte Strecke $EF$. Damit haben wir aber noch eine weitere Variante gefunden, das rechteckige Faltpapier für unser Pyramidenmodul herzustellen.

Als nächstes falten wir ein Pyramidenmodul aus einem quadratischen Faltpapier, in dem die Faltlinie

$EF$ nach Bild 16 gefaltet wurde. Allerdings trennen wir jetzt das schmale Rechteck nicht ab. Damit lösen wir gleichzeitig des obige Problem der Verankerung der Pyramidenmodule untereinander. Die Bilder 17a bis 17k zeigen die neue Faltreihenfolge, wobei wir mit einem Quadrat, das nach Bild 16 vorbereitet wurde, starten.

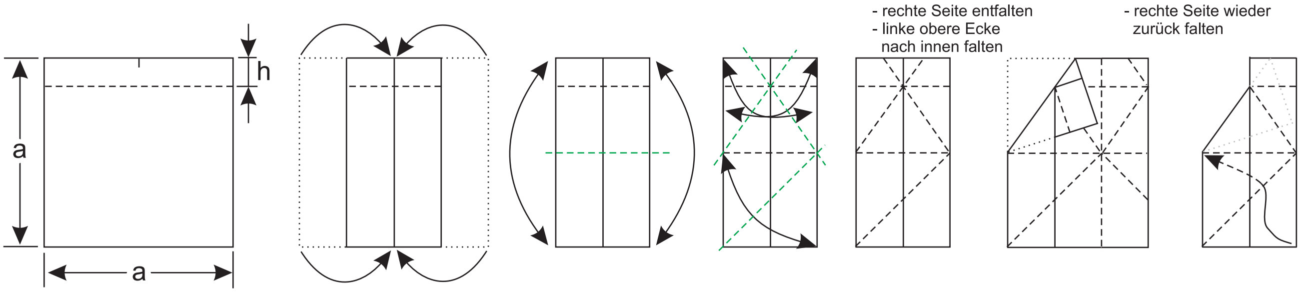
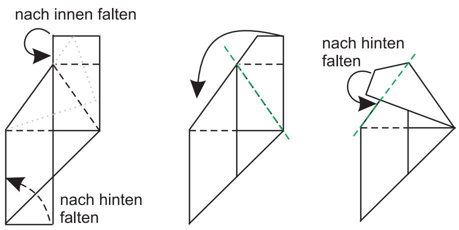
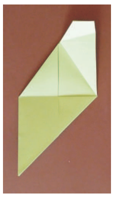
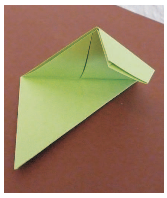



Bild 17a Bild 17b Bild 17c Bild 17d Bild 17e Bild 17f Bild 17h





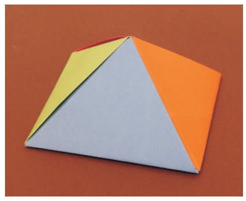


Bild 17i Bild 17j Bild 17k Bild 17m Bild 17n Bild 17o

Im Bild 17m ist das fertige Modul zu sehen und im Bild 17n ist dieses Modul aufgerichtet, so wie es anschließend verbaut wird. In diesem Bild ist auch deutlich der Anker zu sehen, der die Seitendreiecke der Pyramide dann gut zusammenhält. Bild 17o zeigt schließlich die fertige Pyramide.

Der Zusammenbau von vier solchen Modulen zu einer Pyramide ist etwas kniffelig, insbesondere das Einführen der letzten Lasche, um die Pyramide zu schließen. Hier können wir notfalls etwas schummeln, indem wir von der letzten Lasche den Anker einfach nach hinten umfalten, so wie es im Bild 17p zu sehen ist. Diese Lasche lässt sich nun problemlos in die Tasche des entsprechenden Seitendreiecks einführen, ohne das eine Verankerung mit dem darauffolgenden Seitendreieck erfolgt. Die Pyramide hält trotzdem gut zusammen.

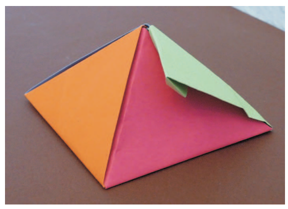


Bild 17p

Nun erinnern wir uns wieder daran, weshalb wir eigentlich diese Pyramide gebaut haben. Sie ist etwas besonderes, denn sechs solche Pyramiden lassen sich um die Pyramidenspitze so zusammenlegen, dass ein Würfel entsteht. Um dies zu verdeutlichen fertigen wir fünf weitere Pyramiden dieser Art an.

Die Grundflächen dieser sechs Pyramiden lassen sich nun zu einem Würfelnetz zusammenlegen, wie es im Bild 18a gezeigt ist. Wir nutzen Klebepunkte, um zwei aneinanderstoßende Grundflächen wie mit einem Scharnier zu verbinden. Nun können wir das Würfelnetz zu einem Würfel mit der Kantenlänge $\frac{a}{2}$ zusammenfalten, wie es im Bild 18b zu sehen ist. Die Pyramidenspitzen treffen sich im Würfelmittelpunkt. Bild 18c zeigt unseren Würfel, der aus Pyramiden zusammengesetzt ist im Vergleich zu dem Würfel, den wir am Anfang gebaut haben.

Die Pyramide, die wir hier verwenden, hat aufgrund ihrer Konstruktion die folgenden Eigenschaften:
- Die Größe des Neigungswinkels von zwei gegenüberliegenden Seitendreiecken beträgt $90^0$.
- Die Größe des Neigungswinkels von zwei benachbarten Seitendreiecken beträgt $120^0$.
- Die Größe des Neigungswinkels eines Seitendreiecks gegenüber der Grundfläche beträgt $45^0$.

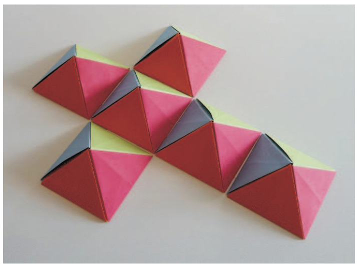


Bild 18a

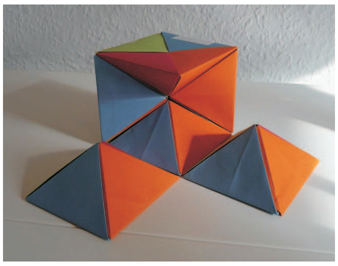


Bild 18b

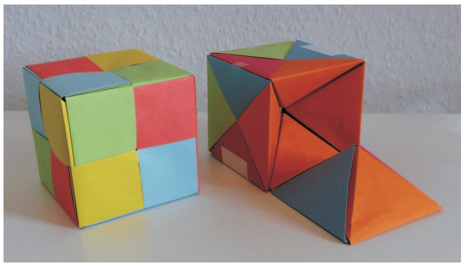


Bild 18c

Natürlich können wir das Würfelnetz aus Bild 18a nicht nur so zum Würfel zusammenfalten, dass die sechs Pyramiden im Innern des Würfels liegen. Wir können das Würfelnetz auch so zum Würfel zusammenfalten, dass die sechs Pyramiden nach außen zeigen (Bild 19a). Bild 19b zeigt den kompletten Körper, der sich daraus ergibt. Wir sehen, dass zwei Seitendreiecke, die eine Würfelkante gemeinsam haben, in einer Ebene liegen und einen Rhombus bilden. Dies liegt an der oben genannten Pyramideneigenschaft, dass die Größe des Neigungswinkels jedes Seitendreiecks gegenüber der Grundfläche $45^0$ beträgt.

Da unser neues Polyeder durch $6 \cdot 4 = 24$ kongruente gleichschenklige Dreiecke begrenzt wird, von denen je zwei einen Rhombus bilden, entsteht ein Körper der durch 12 kongruente Rhomben begrenzt wird. Dieser Körper wird Rhombendodekaeder genannt und er entsteht durch das "Umstülpen" eines Würfels mit den inneren Pyramiden.

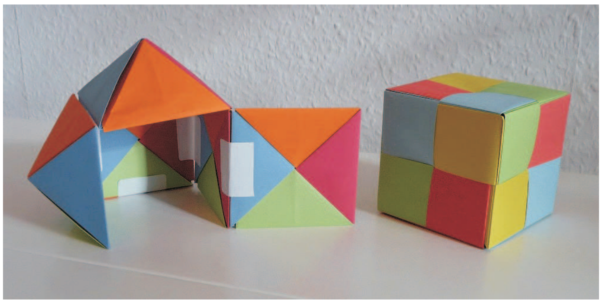


Bild 19a

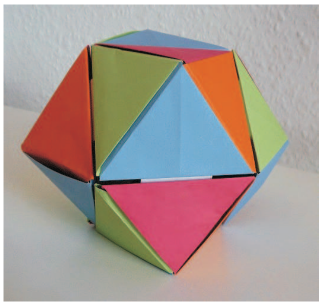


Bild 19b

Das Rhombendodekaeder hat 14 Ecken, davon sechs Pyramidenspitzen und acht Würfelecken. Damit gibt es auch zwei Sorten von Ecken: In den sechs Pyramidenspitzen treffen jeweils vier Rhomben (mit dem spitzen Winkel) und in den acht Würfelecken treffen jeweils drei Rhomben (mit den stumpfen Winkeln) zusammen.

Weil die Neigungswinkel zweier benachbarter Rhomben immer eine Größe von $120^0$ haben, ist das Rhombendodekaeder auch ein "Raumfüller".

Weiterhin können wir aus unserer Konstruktion sofort ablesen, dass das Rhombendodekaeder eine Inkugel besitzt, deren Mittelpunkt der Würfelmittelpunkt ist und die jede Rhombenfläche im Kantenmittelpunkt des Würfels berührt. Der Würfelmittelpunkt ist auch der Mittelpunkt der Umkugel des Rhombendodekaeders. Weil die Kantenlänge des Rhombendodekaeders gleich der Länge der halben Raumdiagonalen des Würfels ist, geht diese Umkugel durch alle 14 Körperecken.

Das Volumen des Rhombendodekaeders ist gleich dem doppelten Volumen des einbeschriebenen Würfels. Da der Würfel aus quadratischem Faltpapier der Kantenlänge $a$ entstanden ist und damit eine Kantenlänge von $\frac{a}{2}$ hat, ist das Würfelvolumen $V_W = \frac{1}{8}a^3$. Folglich ist das Volumen des Rhombendodekaeders gleich $V_{Rh} = \frac{1}{4}a^3$

Weil die Kantenlänge $s$ des Rhombendodekaeders gleich der halben Länge der Raumdiagonalen eines Würfels mit der Seitenlänge $\frac{a}{2}$ist, ist $s = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Daraus folgt $a = \frac{4}{3}\sqrt{3}s$. Für das Volumen $V_{Rh}$ erhalten wir damit $V_{Rh} = \frac{1}{4}(\frac{4}{3}s\sqrt{3})^3 = \frac{16}{9}\sqrt{3}s^3$. Somit haben wir das Volumen eines Rhombendodekaeders in Abhängigkeit von seiner Kantenlänge bestimmt.

Weitere interessante Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten zum Rhombendodekaeder findet man in [1] und [2].

Natürlich können wir durch Modifikation unseres Pyramidenmoduls auch ein Modul für ein Rhombendodekaeder herstellen. Wir müssen nur in der Faltanleitung nach Bild 17a - 17k die untere Hälfte des Moduls genau so falten wie die obere, d.h. insbesondere müssen wir auch von der unteren Quadratkante (Bild 17a) den Abstand $h$ abtragen. Die Bilder 20a und 20b zeigen das fertige Modul. Aus 12 dieser Module lässt sich ein Rhombendodekaeder zusammenstecken, das in Bild 20c gezeigt ist.

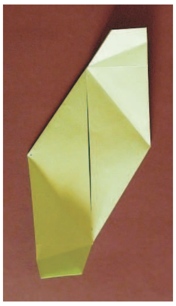


Bild 20a

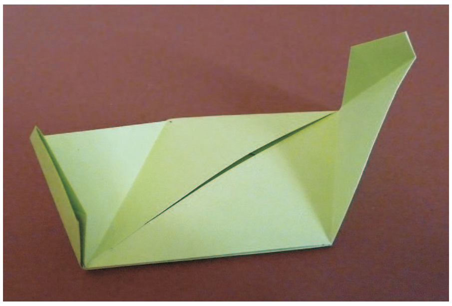


Bild 20b

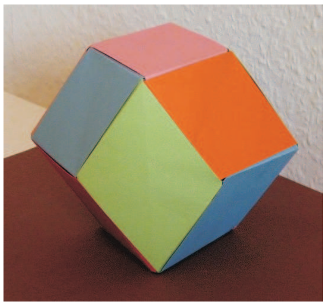


Bild 20c

An dieser Stelle soll auch noch auf ein Modul für ein Rombendodekaeder aus [3] hingewiesen werden. Dieses Modul wird aus einem DIN A4-Papier hergestellt. Auch rhombische Tetraeder und Pyramiden werden dort gebaut.

## Literatur

[1] Fejes Tóth, László: *What the bees know and what they do not know.* Bulletin of the American mathematical Society, Band 70, 1964, S.468 - 481. http://www.ams.org/journals/bull/1964-70-04/S0002-9904-1964-11155-1/S0002-9904-1964-11155-1.pdf

[2] Hemme, Heinrich: *Die Mathematik der Bienenwabe.* In: Spektrum der Wissenschaft - Mathematische Unterhaltung, DIGEST 2/2002, S.78 - 82.

[3] Mitchell, David: *Mathematical Origami.* Tarquin Publications, 2003.

[4] Mulatinho, Paulo: *Pfiffiges Origami.* Knauer, 2003.

### Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.