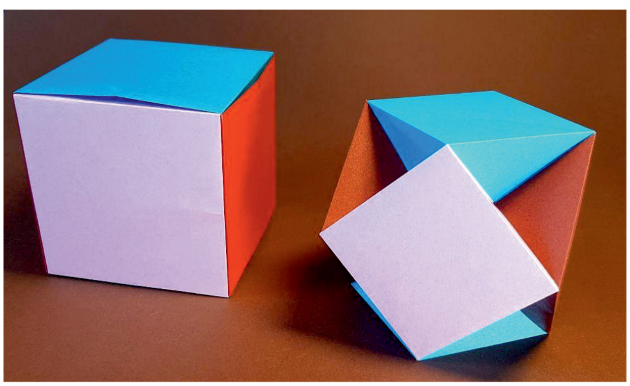
Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de September 2020

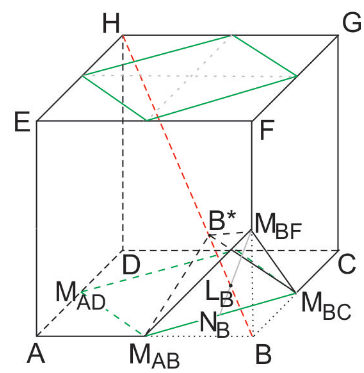
Im Innern des Schmetterlingsballes

Michael Schmitz

In [1] haben wir uns mit dem Schmetterlingsball beschäftigt und ihn aus Modulen zusammengesetzt. Er war ziemlich instabil, was auch so sein sollte. Stabiler bekommen wir den Schmetterlingsball, wenn wir die Module des Kolumbuswürfels, wie in [2] beschrieben, modifizieren. Dann entsteht auch der Schmetterlingsball aus einem Würefel, bei dem alle acht Ecken nach innen gestülpt sind. Bild 1a zeigt einen solchen Schmetterlingsball neben dem Ausgangswürfel.



a



b

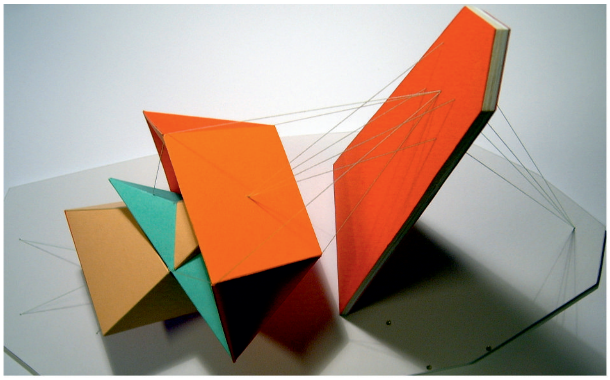
Bild 1

Unser Polyeder hat 20 Ecken, 30 Flächen und 48 Kanten. Wenn der Ausgangswürfel die Kantenlänge a hat, dann ergibt sich des Volumen des Schmetterlingsballes zu $V_{SB} = \frac{2}{3}a^3$ und seine Oberfläche zu $O_{SB} = 6a^2$. Sehen wir uns eine nach innen gestülpte Würfelecke, z.B. B^* an (Bild 1b), so haben wir bereits in [2] gezeigt, dass B^* ein Drittelungspunkt der Raumdiagonalen BH ist, d.h., es gilt $|BB^*| = \frac{1}{3}|BH|$.

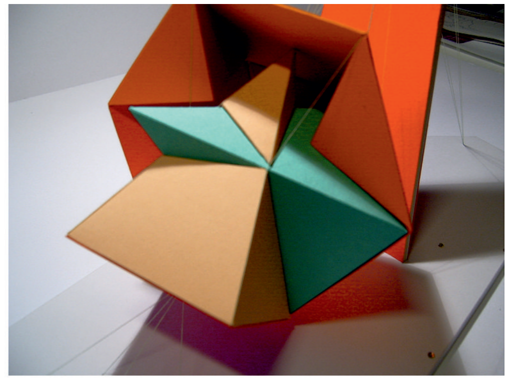
Herr Walter Ehrlich[1], Wunstorf, beschäftigt sich ebenfalls mit Mathematik und deren Veranschaulichung unter künstlerischen Aspekten. Er schickte mir die beiden Fotos, die in den Bildern 2a und b zu sehen sind und das Innere eines Schmetterlingsballes, den Herr Ehrich *Japanisches Polyeder* nennt, zeigen. Den Bildern können wir entnehmen, dass das Innere des Schmetteringsballes mit sechs quadratischen Pyramiden, die sich gegenseitig durchdringen, ausgefüllt ist. Die Kantenlänge der Grundfläche

[1]E-Mail: wa-ehrlich@t-online.de

dieser Pyramiden beträgt $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und die Höhe a. Die quadratischen Seitenflächen des Schmetterlingsballes bilden die Grundflächen der Pyramiden, ihre Spitzen liegen in den jeweils gegenüberliegenden quadratischen Seitenflächen.



a



b

Bild 2: Fotos von Walter Ehrlich

Wir wollen jetzt zeigen, dass solche Pyramiden exakt in den Schmetterlingsball passen. Dazu gehen wir von einer Pyramide mit der Grundfläche $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{AD}$ aus (vgl. Bild 1b). Die Seitenflächen dieser Pyramide werden durch die nach innen gehenden Dreieck $M_{AB}M_{BC}B^*$, $M_{BC}M_{CD}C^*$, $M_{CD}M_{AD}D^*$ und $M_{AD}M_{AB}A^*$ des Schmetterlingsballes gebildet. Im Bild 3 ist eine solche Pyramide in einem Modul des Schmetterlingsballes zu sehen. Da diese vier Dreiecke die gleich Neigung gegenüber der Grundfläche haben, ist die dadurch bestimmte Pyramide gerade, d.h., ihre Spitze liegt auf der Senkrechten der Grundfläche $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{AD}$. Diese Senkrechte ist die Achse der Pyramide, die auch durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche des Schmetterlingsballes geht.

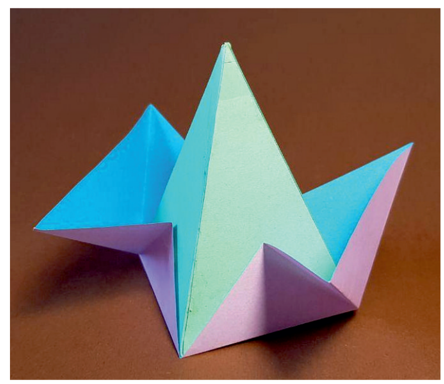


Bild 3

Von dieser Pyramide zeigen wir jetzt, dass sie die Höhe a hat. Dazu betrachten wir einen Schnitt durch den Würfel bzw. durch den Schmetterlingsball mit der Ebene $DBFH$. Dieser Schnitt ist im Bild 4 dargestellt und dort passend in ein Koordinatensystem eingebettet. Wie bereits oben erwähnt, ist B^* ein Drittelungspunkt von BH, d.h., B^* hat die Koordinaten $B^*(\frac{2}{3}a\sqrt{2}; \frac{1}{3}a)$. In [3] haben wir hergeleitet, dass sich B^* auch als Lot von F auf BH ergibt und dieses Lot durch den Mittelpunkt von DB geht. Nun ist L_B (vgl. Bild 1b) der Schnittpunkt von BH mit dem Dreieck $M_{AB}M_{BC}M_{BF}$. Da B^* das Spiegelbild von B an dieser Ebene ist, muss L_B der Mittelpunkt von BB^* sein. Weiterhin schneidet $M_{FB}L_B$ die Strecke $M_{AB}M_{BC}$

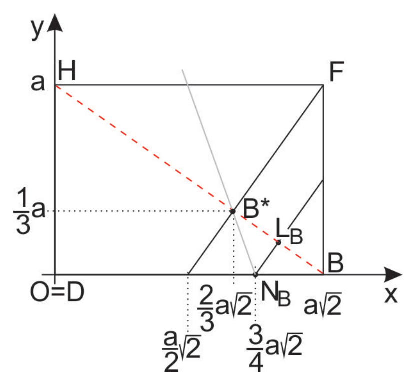


Bild 4

in N_B (vgl. Bild 1b). Nun ist aber $M_{FB}L_B$ senkrecht zu BH und damit ergibt sich (vgl. Bild 4), dass N_B die Koordinaten $N_B(\frac{3}{4}a\sqrt{2}; 0)$ hat.

Mit den Punkten N_B und B^* können wir die Gleichung $y = mx + n$ dieser Geraden im gegebenen Koordinatensystem herleiten. Diese Gerade ist auch eine Mantellinie der betrachteten Pyramide und geht damit durch die Spitze der Pyramide, schneidet also die Achse der Pyramide.

Da B^* auf dieser Geraden liegt, gilt $\frac{1}{3}a = m \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{2} + n$ (1), und
da N_B auf dieser Geraden liegt, gilt $0 = m \cdot \frac{3}{4}a\sqrt{2} + n$ (2).

Aus Gleichung (2) erhalten wir sofort $n = -m \cdot \frac{3}{4}a\sqrt{2}$. Diesen Wert für n setzen wir in die Gleichung (1) ein und erhalten $\frac{1}{3}a = m \cdot \frac{2}{3}a\sqrt{2} - m \cdot \frac{3}{4}a\sqrt{2}$. Daraus erhalten wir $m = -2\sqrt{2}$ und weiterhin noch $n = 3a$. Also ist $y = -2\sqrt{2}x + 3a$ die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte N_B und B^*.

Setzen wir $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ in diese Geradengleichung ein, so erhalten wir $y = -2\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2} + 3a = a$. Dies bedeutet aber auch, dass die Gerade durch den Mittelpunkt von FH geht. Dieser Mittelpunkt ist aber gleichzeitig auch der Mittelpunkt der quadratischen Seitenfläche des Schmetterlingsballes (vgl. Bild 1b), die $M_{AB}M_{BC}M_{CD}M_{AD}$ gegenüber liegt. Durch diesen Mittelpunkt verläuft aber auch die Achse der betrachteten Pyramide. Folglich liegt die Spitze der Pyramide in diesem Punkt und damit ist die Höhe der Pyramide gleich a, wie behauptet.

Aus unseren Überlegungen ergibt sich aber auch sofort eine weitere Möglichkeit ein DIN A4-Blatt längs und quer zu dritteln: Dem Bild 4 entnehmen wir, dass wir ein DIN A4-Blatt $ABCD$ senkrecht zur langen Seite halbieren und anschließend das rechts liegende Teilrechteck (DIN A5) senkrecht zu seiner kurzen Kante halbieren müssen (Bild 5a und b).

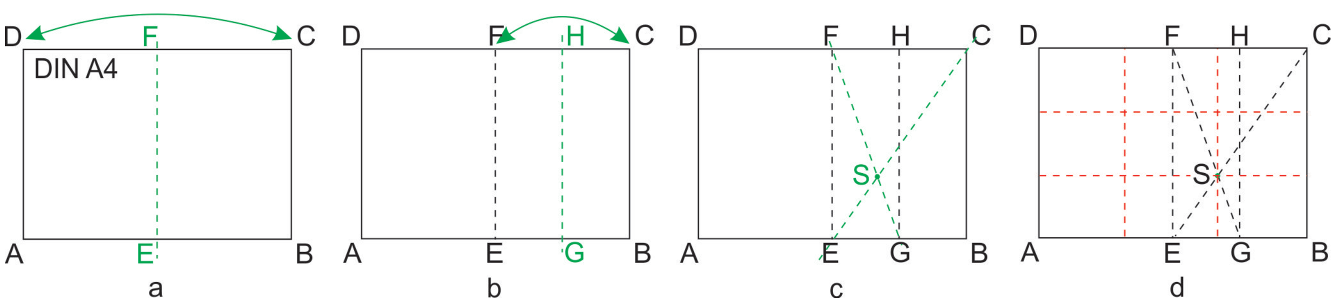


Bild 5

Dann falten wir die beiden Diagonalen CE und FG (Bild 5c), wobei der Schnittpunkt S entsteht. S ist ein Punkt, der die Drittelung des DIN A4-Blattes sowohl längs als auch quer ermöglicht, wie dem Bild 5d zu entnehmen ist.

Nun kehren wir zum Schmetteringsball zurück und betrachten die sechs einbeschriebenen Pyramiden, die sich gegenseitig durchdringen. Diese sechs Pyramiden sind im Bild 6 dargestellt. In diesem Bild, das mit POV-Ray[2] konstruiert wurde, ist zusätzlich das Kantenmodell des umgebenden Würfels zu sehen.

[2]http://www.povray.org/

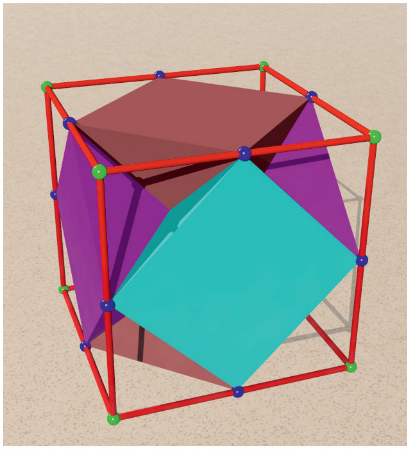
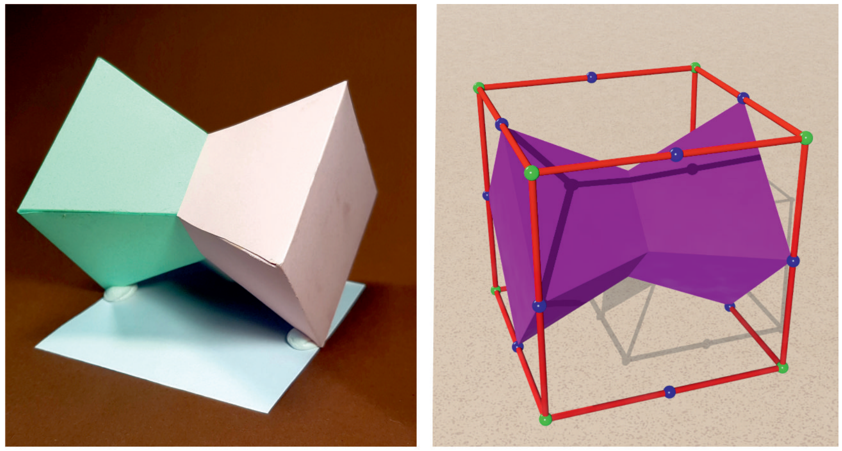


Bild 6



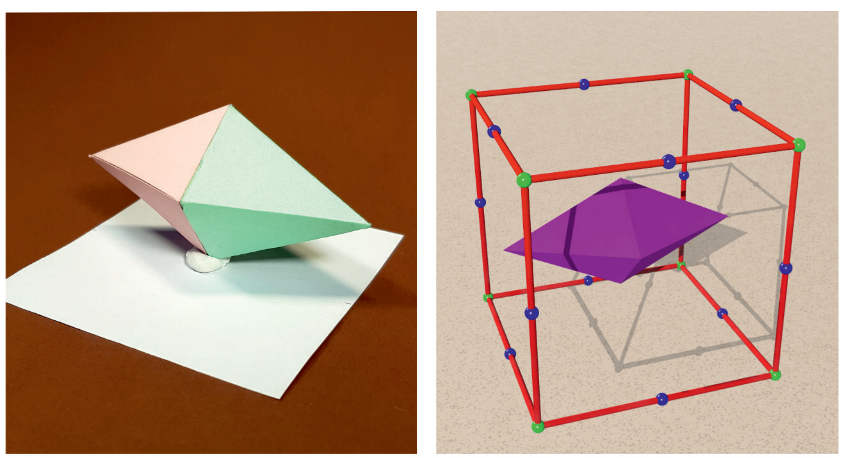
a b

Bild 7

Wir wollen nun, wie bereits Herr Ehrlich auch, herausfinden, wie der Durchschnitt dieser sechs Pyramiden aussieht.

Dazu betrachten wir zuerst zwei Pyramiden, deren Grundflächen auf dem Schmetterlingsball gegenüber liegen. Im Bild 7a und b sehen wir, wie sich diese beiden Pyramiden durchdringen. Bild a zeigt ein Pappmodell und Bild b ein POV-Ray-Bild dieser beiden Pyramiden. Gehen wir davon aus, dass der umgebende Würfel die Kantenlänge a hat, dann haben die Grundflächen dieser quadratischen Pyramiden eine Kantenlänge von $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ und a ist die Höhe dieser Pyramiden.

Es ist dann auch sofort klar, dass sich die Mantelflächen dieser beiden Pyramiden in einem Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{4}\sqrt{2}$ schneiden. Dieses Quadrat liegt in Ähnlichkeitslage zu den beiden Pyramidengrundflächen.



a b

Bild 8

Dann ist ebenso klar, dass der Schnittkörper der beiden betrachteten Pyramiden eine Doppelpyramide über diesem Quadrat ist. Im Bild 8 ist dieser Schnittkörper zu sehen. Die Achse dieser Doppelpyramide geht durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden quadratischen Seitenflächen des Schmetterlingsballes bzw. durch die Mittelpunkte der zwei zugehörigen Seitenflächen des umgebenden Würfels. Jeder Teil der Doppelpyramide hat eine Höhe von $\frac{a}{2}$.

Es gibt drei solche Doppelpyramiden (die man sich schon mal im Bild 13a und b ansehen kann), wobei jede zu einem Paar gegenüberliegender Pyramiden im Schmetterlingsball gehört. Die Achsen dieser drei Doppelpyramiden stehen paarweise senkrecht aufeinander und schneiden sich im Mittelpunkt des Würfels.

Wir berechnen nun wichtige Größen an der Pyramide, deren Grundfläche eine quadratische Seitenfläche des Schmettelingsballes ist und deren Spitze im Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche liegt. Im Bild 9 ist eine solche Pyramide gezeigt.

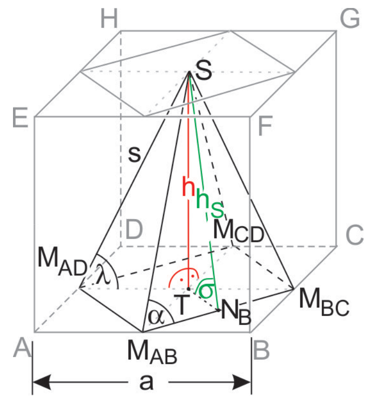


Bild 9

Die Körperhöhe h stimmt mit der Kantenlänge des umgebenden Würfels überein, also $h = a$.
Die Länge l der quadratischen Grundfläche beträgt $l = \frac{a}{2}\sqrt{2}$.
Die Länge s der Kanten der dreieckigen Seitenflächen berechnen wir mit dem Satz des Pythagoras.
Es gilt $s = \sqrt{h^2 + (\frac{M_{AB}M_{CD}}{2})^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.
Nun berechnen wir die Höhe h_S einer Seitenfläche.
Es ist $h_S = \sqrt{h^2 + (\frac{a}{4}\sqrt{2})^2} = \frac{3a}{4}\sqrt{2}$.

Als nächstes berechnen wir die Größen von Winkeln, die in dieser Pyramide eine wichtige Rolle spielen. Wir beginnen mit dem Neigungswinkel λ einer Pyramidenkante gegenüber der Grundfläche. Im rechtwinkligen Dreieck $M_{AD}TS$ gilt $\tan\lambda = \frac{h}{|M_{AD}T|} = 2$, also $\lambda \approx 63,4349...^\circ$. Und für den Winkel $\mu = \sphericalangle M_{AD}ST$ im selben Dreieck ergibt sich $\tan\mu = \frac{|M_{AD}T|}{h} = \frac{1}{2}$, also $\mu \approx 26,5650...^\circ$.

Nun berechnen wir die Größe α des Basiswinkels in einem Seitendreieck der Pyramide. Im rechtwinkligen Dreieck N_BST gilt $\sin\alpha = \frac{h_S}{s} = \frac{\frac{3a}{4}\sqrt{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{5}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$, also $\alpha \approx 71,5650...^\circ$. Für die Größe β des Winkels zwischen den beiden Schenkeln dieses Dreiecks erhalten wir mit dem Kosinussatz $l^2 = s^2 + s^2 - 2ss\cdot\cos\beta$, also $(\frac{a}{2}\sqrt{2})^2 = 2(\frac{a}{2}\sqrt{5})^2 \cdot (1 - \cos\beta)$, woraus $\cos\beta = \frac{4}{5}$ folgt. Damit ist dann $\beta \approx 36,8698...^\circ$.

Abschließend berechnen wir noch die Größe σ des Neigungswinkels von h_S gegenüber der Grundfläche. Im Dreieck TN_BS gilt $\sin\sigma = \frac{h}{h_S} = \frac{a}{\frac{3a}{4}\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, also $\sigma \approx 70,5287...^\circ$. Für $\tau = |\sphericalangle TSN_B|$ ergibt sich dann $\cos\tau = \frac{h}{h_S} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, also $\tau \approx 19,4712...^\circ$.

Nun wenden wir uns der Doppelpyramide zu, die als Schnitt von zwei gegenüberliegenden Pyramiden entsteht. Im Bild 10 ist eine solche Doppelpyramide zu sehen. Wie bereits oben erwähnt, ist die gemeinsame Grundfläche $GHIK$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\frac{a}{4}\sqrt{2}$. Jede der beiden Doppelpyramiden hat die Höhe $h' = \frac{1}{2}h = \frac{a}{2}$.

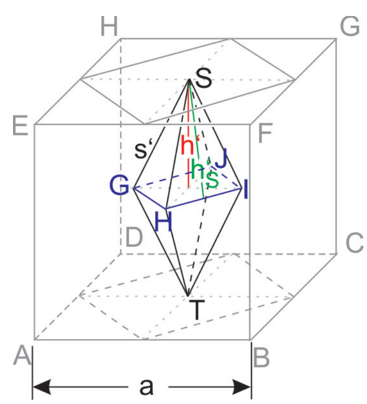


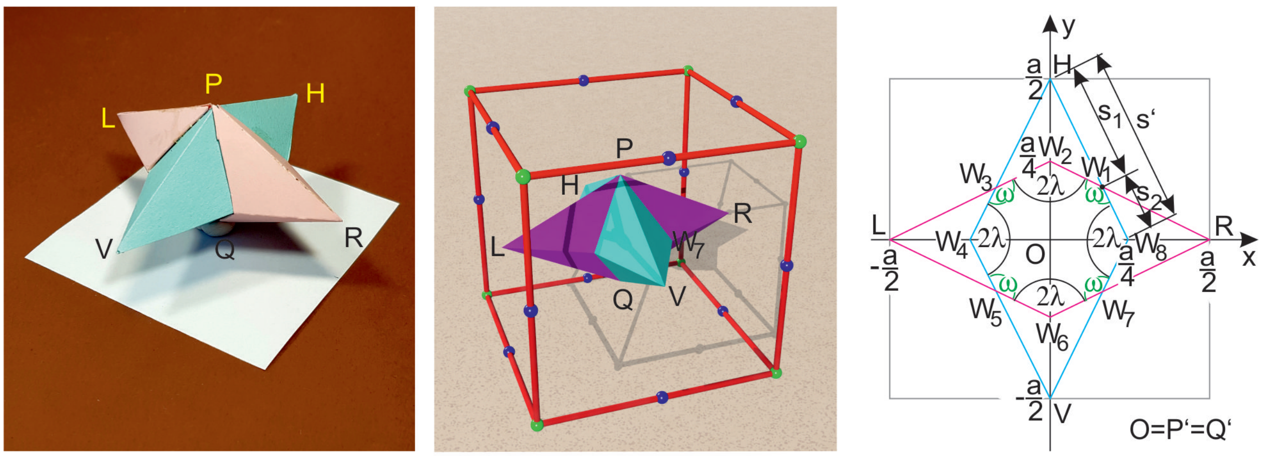
Bild 10

Für die Kantenlänge s' der Doppelpyramide gilt $s' = \frac{1}{2}s = \frac{a}{4}\sqrt{5}$.
Für die Länge h'_S der Höhe eines Seitendreiecks gilt $h'_S = \frac{1}{2}h_S = \frac{3a}{8}\sqrt{2}$.

Die entsprechenden Neigungswinkel stimmen natürlich mit den oben berechneten überein. Daher können wir auch feststellen, dass zwei dreieckige Seitenflächen der Doppelpyramide, die eine gemeinsame Kante der Grundfläche haben, einen Neigungswinkel der Größe $2\sigma \approx 141,0575...^\circ$ gegeneinander haben.

Nun werden wir uns weiter mit dem Durchschnitt der sechs Pyramiden befassen. Den Durchschnitt von zwei gegenüberliegenden Pyramiden haben wir schon untersucht. Das ist die eben betrachtete Doppelpyramide. Jetzt nehmen wir zwei weitere, einander gegenüberliegende Pyramiden hinzu. Auch diese beiden Pyramiden bilden aus Durchschnitt eine Doppelpyramide.

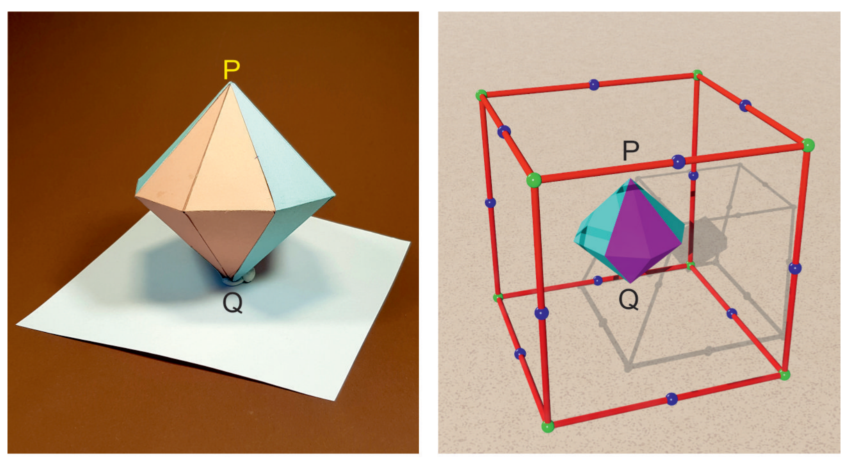
Um uns dem Durchschnitt der sechs Pyramiden weiter zu nähern, untersuchen wir im Folgenden den Durchschnitt von zwei Doppelpyramiden, so wie es in den Bildern 11a und b zu sehen ist. Bild 11c zeigt den Blick von oben, eingebettet in ein Koordinatensystem.



a b c

Bild 11

Die Spitzen L, R, V und H der beiden Doppelpyramiden liegen in einer Ebene, zusammen mit den zugehörigen Kanten. Dem Bild 11c entnehmen wir, dass in dieser Ebene, im Innern der beiden Doppelpyramiden, ein Achteck entsteht. Folglich ist der Durchschnitt dieser beiden Doppelpyramiden wieder eine Doppelpyramide, diesmal aber mit achteckiger Grundfläche und den beiden Spitzen P und Q. Den zugehörige Schnittkörper zeigt das Bild 12.



a b

Bild 12

Es ist aufgrund der Symmetrie sofort klar, dass dieses Achteck gleichseitig mit der Seitenlänge s_2 ist. Ist es aber auch gleichwinklig, also dann regelmäßig? Bevor wir diese Frage klären, berechnen wir die

Seitenlänge s_2 dieses Achtecks. Dazu bestimmen wir zuerst die Gleichungen der Geraden durch H und W_8 (vgl. Bild 11c). Mit Hilfe der Achsenabschnittsgleichung erhalten wir sofort

$g(HW_8)$: $\frac{x}{\frac{a}{4}} + \frac{y}{\frac{a}{2}} = 1$ bzw. $y = -2x + \frac{a}{2}$.

Nun die Gleichung der Geraden durch W_2 und R. Wir erhalten $g(W_2R)$: $\frac{x}{\frac{a}{2}} + \frac{y}{\frac{a}{4}} = 1$ bzw. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{4}$.

Diese beiden Geraden schneiden sich im Punkt $W_1(x_{W_1}; y_{W_1})$.

Es gilt dann
$-2x_{W_1} + \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}x_{W_1} + \frac{a}{4}$, woraus $x_{W_1} = \frac{a}{6}$ und damit auch
$y_{W_1} = \frac{a}{6}$ folgt. Also $W_1(\frac{a}{6}; \frac{a}{6})$.

Da die x-Koordinate von W_1 die Strecke HO drittelt, muss (wegen des Strahlenstzes) W_1 auch die Strecke HW_8 dritteln. Folglich ist $s_1 = \frac{2}{3}s' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}s = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{6}\sqrt{5}$. Dann ist $s_2 = \frac{a}{12}\sqrt{5}$.

Damit haben wir die Seitenlänge s_2 des Achtecks berechnet. Nun bestimmen wir die Größe des Winkels ω mit Hilfe des Kosinussatzes im Dreieck $W_2W_8W_1$.

Es gilt $|W_2W_8|^2 = s_2^2 + s_2^2 - 2s_2s_2 \cdot \cos\omega = 2s_2^2(1 - \cos\omega)$.

Mit $|W_2W_8| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$ erhalten wir $(\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 = 2(\frac{a}{12}\sqrt{5})^2(1 - \cos\omega)$. Daraus ergibt sich $\cos\omega = -\frac{4}{5}$, also $\omega \approx 134,1301...^\circ$. Dieser Wert stimmt nicht mit $2\lambda \approx 126,8698...^\circ$ überein. Folglich ist das Achteck nicht gleichwinklig und damit auch nicht regelmäßig.

Als nächstes berechnen wir $|OW_1|$ mit Hilfe des Kosinussatzes im Dreieck OW_8W_1. Dort gilt $|OW_1|^2 = (\frac{a}{4})^2 + s_2^2 - 2\frac{a}{4}s_2 \cdot \cos\lambda$. Bedenken wir, dass $\tan\lambda = 2$ ist, so folgt mit $\tan\lambda = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda}$ und $\sin\lambda = \sqrt{1 - \cos^2\lambda}$, dass $\cos\lambda = \frac{1}{5}\sqrt{5}$ ist. Damit wird
$|OW_1|^2 = (\frac{a}{4})^2 + (\frac{a}{12}\sqrt{5})^2 - 2\frac{a}{4}\frac{a}{12}\sqrt{5} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{5} = \frac{8}{12^2}a^2$. Also ist $|OW_1| = \frac{a}{6}\sqrt{2} \approx 0,2357...a$.

Nun können wir auch die Kantenlängen $|PW_1|$ und $|PW_8|$ berechnen. Dabei beachten wir, dass P über O senkrecht zum Achteck in der Höhe $\frac{a}{4}$ liegt. Dann erhalten wir im Dreieck POW_8 sofort, dass $|PW_8| = \frac{a}{4}\sqrt{2} \approx 0,3535...a$ ist.

Im Dreieck POW_1 erhalten wir mit dem Satz des Pythagoras $|PW_1| = \sqrt{(\frac{a}{4})^2 + (\frac{a}{6}\sqrt{2})^2} = \frac{a}{12}\sqrt{17} \approx 0,3435...a$.

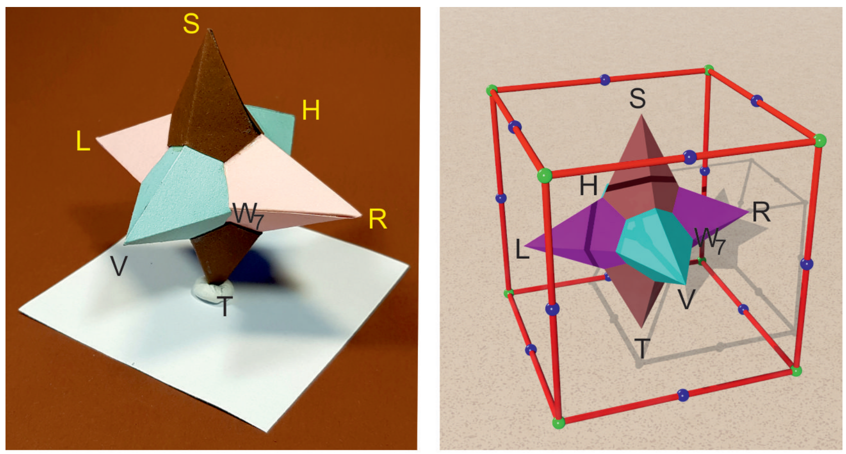
Nun können wir auch noch das Volumen V_{SK2} dieses Schnittkörpers bestimmen. Dazu bedenken wir, dass das Achteck (vgl. Bild 11) von O aus in acht Dreiecke eingeteilt wird, die jeweils zu OW_8W_1 kongruent sind. Daher haben diese Dreiecke bei O einen Innenwinkel der Größe 45°. OW_8W_1 fassen wir nun als Grundfläche einer durch O, W_8, W_1 und P gebildeten Pyramide auf. Diese Pyramide hat die Höhe $\frac{a}{4}$ über der betrachteten Grundfläche. Insgesamt besteht der Schnittkörper dann aus $2 \cdot 8 = 16$ solcher Pyramiden. Für das Volumen erhalten wir dann
$V_{SK2} = 16 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|OW_1||OW_8| \sin 45^\circ \cdot |PO| = 16 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\frac{a}{6}\sqrt{2}\frac{a}{4}\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{36}a^3$.

Zur Berechnung der Oberfläche O_{SK2} des Schnittkörpers bedenken wir, dass diese Oberfläche aus $2 \cdot 8 = 16$ Dreiecken besteht, die alle zum Dreieck PW_8W_1 kongruent sind. Zur Berechnung des Flächeninhaltes dieses Dreiecks bestimmen wir zuerst die Größe γ des Innenwinkels bei P mit Hilfe des Kosinussatzes. Es gilt $|W_8W_1|^2 = |PW_8|^2 + |PW_1|^2 - 2|PW_8||PW_1|\cos\gamma$, also $(\frac{a}{12}\sqrt{5})^2 = (\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 + (\frac{a}{12}\sqrt{17})^2 - 2\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{12}\sqrt{17}\cdot\cos\gamma$ bzw. $\frac{5a^2}{12\cdot 12} = \frac{2a^2}{4\cdot 4} + \frac{17a^2}{12\cdot 12} - 2\cdot\frac{\sqrt{34}a^2}{4\cdot 12}\cdot\cos\gamma$. Daraus erhalten wir $\frac{\sqrt{34}}{2\cdot 12}\cdot\cos\gamma = \frac{30}{12\cdot 12}$, also $\cos\gamma = 5\frac{\sqrt{34}}{34}$ und damit $\gamma \approx 30,9637...^\circ$.

Nun können wir die Oberfläche des Schnittkörpers berechnen. Es ist
$O_{SK2} = 16\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2}\cdot\frac{a}{12}\sqrt{17}\cdot\sin\gamma = \frac{\sqrt{34}a^2}{6}\cdot\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \frac{\sqrt{34}a^2}{6}\cdot\sqrt{1-\frac{25}{34}} = \frac{1}{2}a^2$.

Damit sind auch Oberfläche und Volumen des Schnittkörpers aus zwei quadratischen Doppelpyramiden berechnet. Die Ergebnisse sind bemerkenswert, da sie recht einfach sind.

Für $a = 18\,cm$ erhalten wir $V_{SK2} = \frac{18\cdot 18\cdot 18}{36}\,cm^3 = 9\cdot 18\,cm^3 = 162\,cm^3$.
Für die Oberfläche erhalten wir dann $O_{SK2} = \frac{18\cdot 18}{2}\,cm^2 = 162\,cm^2$.



a b

Bild 13

Nun wenden wir uns dem Schnittkörper aus drei Doppelpyramiden zu. Diese drei Doppelpyramiden sind im Bild 13 zu sehen. Ihre Achsen stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Um den Schnittkörper dieser drei Doppelpyramiden zu bestimmen, müssen wir nur den eben bestimmten Schnittkörper von zwei Doppelpyramiden mit der dritten schneiden. Diese Situation ist im Bild 14a dargestellt. Vom Schnittkörper der zwei Doppelpyramiden muss alles entfernt werden, das über die dritte Doppelpyramide hinausragt. Dann bleibt der gesuchte Schnittkörper der drei Doppelpyramiden übrig.

Um dieses Abschneiden vorzunehmen, bedenken wir einerseits, dass die Grundfläche der dritten Doppelpyramide mit dem Quadrat $W_2W_4W_6W_8$ übereinstimmt (Bild 14b). Damit schneidet die Seitenfläche SW_6W_8 das Achteck $W_1W_2...W_8$ in der Strecke W_6W_8. Andererseits schneidet diese Seitenfläche die Kante PW_7 in einem Punkt U. Dadurch entsteht als Schnittfläche der betrachteten Seitenfläche mit dem Schnittkörper der zwei Doppelpyramiden das Dreieck W_6W_8U. Außerdem entstehen durch U die Dreiecke PW_6U und PW_8U. Wir bestimmen nun die Koordinaten des Punktes U und dann die Seitenlängen der drei Dreiecke.

Dazu bestimmen wir zuerst $|OL|$, wobei L der Schnittpunkt von W_6W_8 mit OW_7 ist (vgl. Bild 14b). Da OW_7 die Mittelsenkrechte von W_6W_8 ist, ist L auch der Mittelpunkt von W_6W_8. Weiterhin ist $|\sphericalangle W_7OW_8| = 45^\circ$, womit OLW_8 gleichschenklig und rechtwinklig ist. Folglich ist $|OL| = \frac{1}{2}|W_6W_8| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{4}\sqrt{2} = \frac{a}{8}\sqrt{2}$.

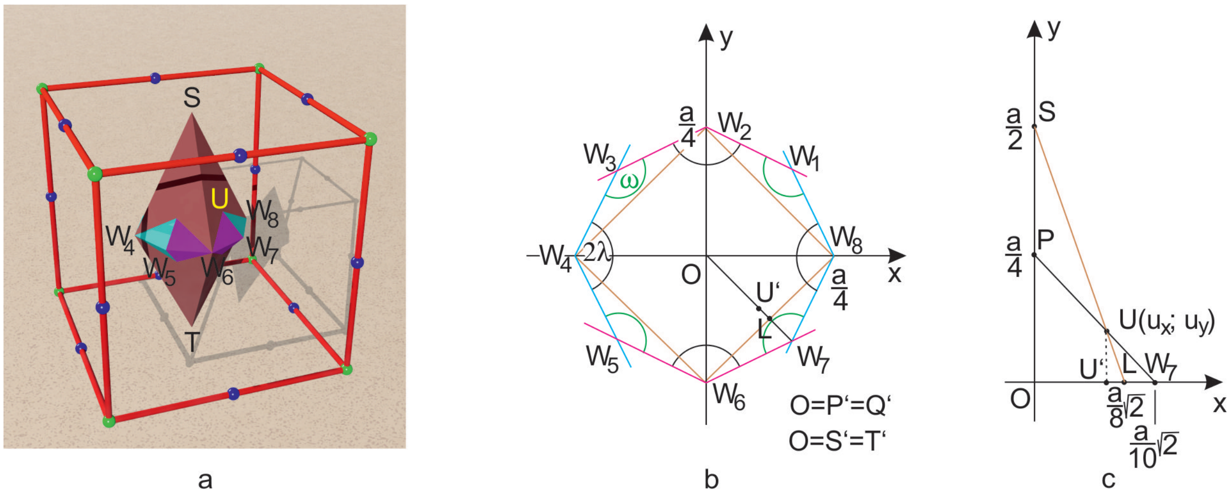


Bild 14

Nun betrachten wir einen Schnitt in der zum Achteck $W_1W_2...W_8$ senkrechten Ebene, die OW_7 enthält. Dieser Schnitt ist im Bild 14c in einem passenden Koordinatensystem dargestellt. $|OW_7| = \frac{a}{6}\sqrt{2}$ hatten wir schon weiter oben berechnet.

Als Geradengleichungen erhalten wir $g(SL)$: $y = -2\sqrt{2}x + \frac{a}{2}$ und $g(PW_7)$: $y = -\frac{3}{4}\sqrt{2}x + \frac{a}{4}$.

Bezeichnen x_U und y_U die Koordinaten von U, so ist $-2\sqrt{2}x_U + \frac{a}{2} = -\frac{3}{4}\sqrt{2}x_U + \frac{a}{4}$, woraus $x_U = \frac{a}{10}\sqrt{2}$ folgt. Mit diesem Wert erhalten wir $y_U = \frac{a}{10}$. Bezeichnet U' die senkrechte Projektion von U auf die Ebene des Achtecks, so ist $|OU'| = \frac{a}{10}\sqrt{2}$. Damit hat aber U bezogen auf das Koordinatensystem aus Bild 14b die Koordinaten $U(\frac{a}{10}; -\frac{a}{10}; \frac{a}{10})$.

Jetzt können wir, mit Hilfe des Satzes des Pythagoras, die Abstände von U zu den Punkten $P(0;0;\frac{a}{4})$, $W_6(0;-\frac{a}{4};0)$ und $W_8(\frac{a}{4};0;0)$ bestimmen.

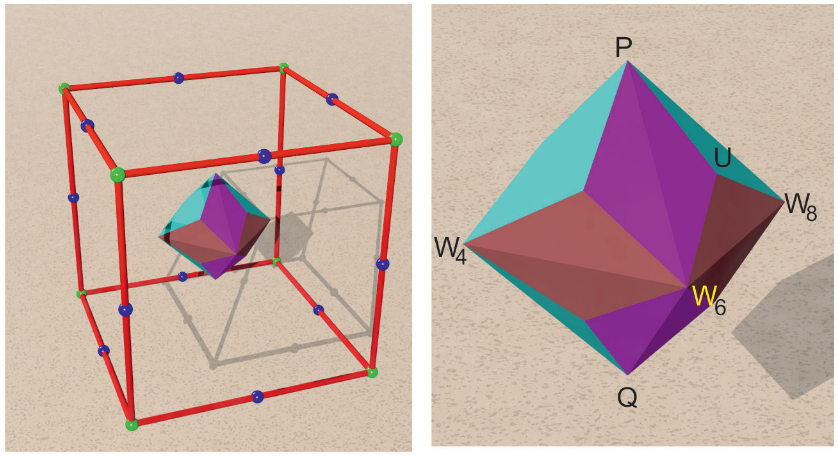
Es ist $|UP| = \sqrt{(0-\frac{a}{10})^2 + (0-\frac{a}{10})^2 + (\frac{a}{4}-\frac{a}{10})^2} = \frac{a}{20}\sqrt{17}$,
$|UW_6| = \sqrt{(0-\frac{a}{10})^2 + (-\frac{a}{4}-(-\frac{a}{10}))^2 + (0-\frac{a}{10})^2} = \frac{a}{20}\sqrt{17}$ und
$|UW_8| = \sqrt{(\frac{a}{4}-\frac{a}{10})^2 + (0-(-\frac{a}{10}))^2 + (0-\frac{a}{10})^2} = \frac{a}{20}\sqrt{17}$.

Damit hat U von den Punkten P, W_6 und W_8 die selbe Entfernung.

Außerdem ist $|W_6W_8| = |PW_6| = |PW_8| = \frac{a}{4}\sqrt{2}$, womit das Dreieck PW_6W_8 gleichseitig ist. Damit sind aber die drei Dreiecke PW_6U, PW_8U und W_6W_8U zueinander kongruent. Mit dem Kosinussatz berechnen wir noch die Größe γ des Innenwinkels bei U. Es gilt
$(\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 = 2(\frac{a}{20}\sqrt{17})^2(1-\cos\gamma)$, woraus $\cos\gamma = -\frac{8}{17}$, also $\gamma \approx 118,0724...^\circ$ folgt.

Da die Betrachtung des Dreiecks SW_6W_8 nur exemplarisch war, gelten die selben Überlegungen analog für die anderen sieben Seitenflächen der dritten Doppelpyramide. Folglich wird der Schnittkörper der drei Doppelpyramiden von $2\cdot(4\cdot3) = 24$ Dreiecken begrenzt, die alle zu UW_6W_8 kongruent sind. Bild 15 zeigt diesen Schnittkörper im umgebenden Ausgangswürfel, als auch in einer vergrößerten Darstellung. Außerdem ist in diesem Schnittkörper ein regelmäßiges Oktaeder mit den Ecken P, W_2, W_4, W_6, W_8

und Q enthalten.



a b

Bild 15

Zum Abschluss berechnen wir noch die Oberfläche O_{SK3} und das Volumen V_{SK3} dieses Schnittkörpers.

Für die Oberfläche erhalten wir $O_{SK3} = 24 \cdot |UW_6W_8| = 24 \cdot \frac{1}{2}(\frac{a}{20}\sqrt{17})^2 \cdot \sin\gamma = \frac{24 \cdot 17 a^2}{2 \cdot 20^2}\sqrt{1 - \cos^2\gamma}$. Damit wird $O_{SK3} = \frac{24 \cdot 17 a^2}{2 \cdot 20^2}\sqrt{1 - (-\frac{8}{17})^2} = \frac{9}{20}a^2$.

Zur Bestimmung des Volumens bedenken wir, dass sich der betrachtete Schnittkörper aus einem Oktaeder, einer Doppelpyramide mit der Grundfläche $W_2W_4W_6W_8$ und den Spitzen P und Q, sowie den acht Pyramiden über den Seiten des Oktaeders zusammensetzt. Diese Pyramiden sind alle kongruent zur Pyramide mit der Grundfläche W_6W_8P und der Spitze U.

Für das Volumen des Oktaeders erhalten wir $V_{Oktaeder} = 2 \cdot \frac{1}{3}(\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{48}a^3$.

Für das Volumen der Pyramide erhalten wir $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 \sin 60° \cdot h$, wobei h die Höhe von U über der Grundfläche W_6W_8P angibt und $\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist (Bild 16).

Da die Grundfläche W_6W_8P ein regelmäßiges Dreieck mit der Seitenlänge $\frac{a}{4}\sqrt{2}$ ist, haben die Höhen dieses Dreiecks die Längen $\frac{a}{8}\sqrt{6}$. H bezeichnet den Schnittpunkt dieser Höhen und er teilt diese Höhen im Verhältnis $2 : 1$. Folglich ist $|W_6H| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{8}\sqrt{6} = \frac{a}{12}\sqrt{6}$.

Da die drei Seitendreiecke zueinander kongruent und gleichschenklig (von U aus) sind, ist H auch der Fußpunkt der Höhe h der Pyramide von U über der Grundfläche W_6W_8P. Dann ergibt sich $h = \sqrt{|W_6U|^2 - |W_6H|^2} = \sqrt{(\frac{a}{20}\sqrt{17})^2 - (\frac{a}{12}\sqrt{6})^2} = \frac{a}{60}\sqrt{3}$.

Nun können wir das Volumen dieser Pyramide berechnen. Es ist $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{a}{4}\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{a}{60}\sqrt{3} = \frac{1}{1920}a^3$.

Damit erhalten wir für das Volumen des gesamten Schnittkörpers $V_{SK3} = V_{Oktaeder} + 8V_{Pyramide} = \frac{1}{48}a^3 + 8 \cdot \frac{1}{1920}a^3 = \frac{1}{40}a^3$.

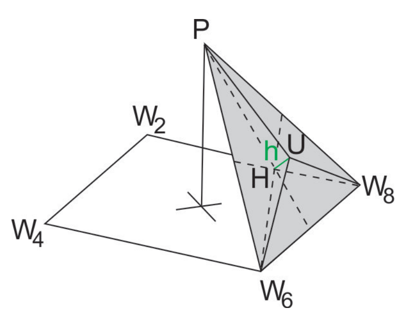


Bild 16

Der Schnittkörper hat insgesamt 14 Ecken, 24 Flächen und 36 Kanten.

Und zum Abschluss soll noch erwähnt werden, dass das oben betrachtete Achteck $W_1W_2...W_8$ Inhalt einer Aufgabe aus der ebenen Geometrie ist:
Zeichnet man von den Seitenmittelpunkten eines Quadrates die Verbindungen zu den beiden gegenüberliegenden Ecken, so entsteht im Innern ein Achteck (Bild 17). Handelt es sich dabei um ein regelmäßiges Achteck?

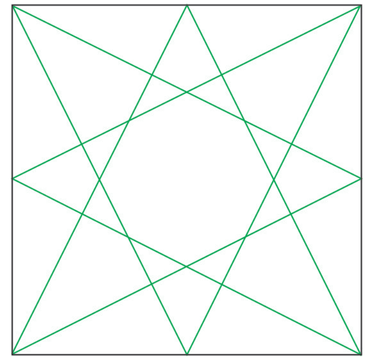


Bild 17

Literatur

[1] Schmitz, Michael: *Ein Schmetterlingsball.* mathegami, Mai 2011.

[2] Schmitz, Michael: *Der Kolumbuswürfel.* Mathegami, September 2009.

[3] Schmitz, Michael: *Drittelung eines DIN A4-Blattes.* Mathegami, Juni 2010.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Formular auf der oben genannten Internetseite.