MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de September 2011

Unser Schreibpapier
Ein Blatt aus der DIN A-Reihe

Michael Schmitz

Zusammenfassung

Mit einer Selbstverständlichkeit benutzen wir unser Schreibpapier, das in der Regel ein DIN A4 Blatt ist. Darüber hinaus kennen wir noch DIN A3 z.B. bei Zeichenblöcken oder DIN A5 bzw. A6 z.B. bei kleineren Heften oder bei Karteikarten. Was hat es aber mit dem DIN A - Format auf sich, wie und warum ist es so festgelegt? Diesen Fragen wollen wir hier nachgehen.

In unserem täglichen Leben nutzen wir das DIN A-Format selbstverständlich z.B. in Form von Schreibblöcken, Schulheften oder Karteikarten. Was dieses Papierformat auszeichnet, ist uns meist jedoch nicht immer bewusst.

Natürlich ist uns bekannt, dass beim Halbieren eines DIN A4 Blattes parallel zur kurzen Blattkante zwei DIN A5 Blätter entstehen, die zum Ausgangsblatt ähnlich sind. Dies ist auch eine der Bedingungen, die an unser DIN A Papier gestellt werden. Im Mathematikunterricht wird dies üblicherweise bei der Behandlung der Ähnlichkeit besprochen.

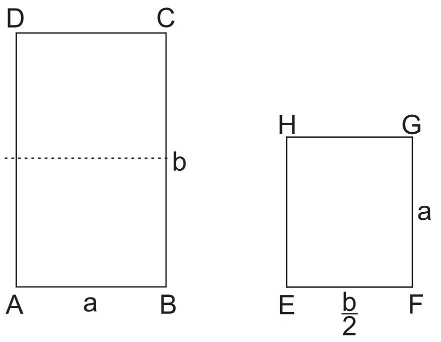

Bild 1a Bild 1b

Betrachten wir nämlich ein beliebiges Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen a und b $(a < b)$, so wie es im Bild 1a gezeigt ist. Nehmen wir ein dazu kongruentes Rechteck, halbieren dieses parallel zur kurzen Seiten a, so erhalten wir zwei neue, zueinander kongruente Rechtecke mit den Seitenlängen $\frac{b}{2}$ und a. Eins davon legen wir neben $ABCD$ so hin, wie es im Bild 1b gezeigt ist und bezeichnen dieses kleinere Rechteck mit $EFGH$. Nun verlangen wir, dass die beiden Rechtecke $ABCD$ und $EFGH$ ähnlich zueinander sein sollen. Dann müssen die Verhältnisse entsprechender Seiten übereinstimmen, d.h., es muss $\frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|FG|}$ gelten. Damit muss aber $\frac{a}{\frac{b}{2}} = \frac{b}{a}$ bzw. $a^2 = \frac{1}{2}b^2$ sein, woraus sowohl $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ als auch $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ folgt. Damit ist nun klar, dass ein Rechteck genau dann die Eigenschaft hat, dass es zu seiner Hälfte ähnlich ist, wenn das Verhältnis aus langer zu kurzer Seite $(\frac{b}{a})$ den Wert $\sqrt{2}$ hat. Dies ist für unser DIN A4 Blatt erfüllt, wie wir auch durch Messen der Kantenlängen eines DIN A4 Blattes (angenähert) bestätigen können. Das Messen eines DIN A 4 Blattes ergibt eine Breite von $a = 209mm$ und eine Höhe von $b = 296mm$. Daraus erhalten wir $\frac{b}{a} \approx 1,416$, also eine sehr gute Annäherung an $\sqrt{2}$.

Aber warum hat unser DIN A4 Blatt genau diese Größe? Denn es gibt ja sehr viele verschiedene Rechtecke bei denen das Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ ist. Die Größe unseres DIN A4 Blattes wird durch eine zweite Bedingung eindeutig festgelegt: Der Flächeninhalt F_{A_0} des DIN A0 Blattes beträgt $1m^2$.

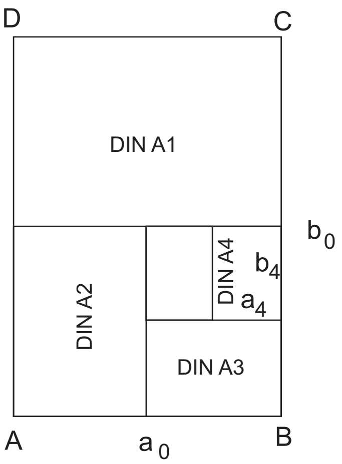

Bild 2

Bezeichnen wir mit a_0 und b_0 die Seitenlängen des DIN A0 Blattes, so folgt mit der zweiten Eigenschaft $a_0 \cdot b_0 = 1m^2$. Mit der ersten Eigenschaft ($b_0 = a_0\sqrt{2}$) ergibt sich daraus $a_0 \cdot a_0\sqrt{2} = 1m^2$, also $a_0^2 \cdot \sqrt{2} = 1m^2$, $a_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}m^2$ bzw. $a_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}}m = \frac{1}{2}\sqrt[4]{8} \approx 0,84089m$.

Für b_0 erhalten wir dann $b_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2}m = \sqrt{\sqrt{2}}m = \sqrt[4]{2}$, also $b_0 \approx 1,18920m$. Auf ganze Millimeter gerundet erhalten wir dann $a_0^* = 841mm$ und $b_0^* = 1189mm$.

Bedenken wir, dass unser DIN A4 Blatt sich durch mehrfaches Halbieren eines DIN A0 Blattes ergibt, so wie es im Bild 2 gezeigt ist, können wir feststellen, dass für die Seitenlängen a_4 und b_4 eines DIN A4 Blattes $a_4 = \frac{1}{4}a_0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{2}}m \approx 0,21022m$ und $b_4 = \frac{1}{4}b_0 = \frac{1}{4}\sqrt[4]{2}m \approx 0,29730m$ gilt. Auf ganze Millimeter gerundet erhalten wir $a_4^* = 210mm$ und $b_4^* = 297mm$. Dem Bild 2 entnehmen wir auch, dass 16 DIN A4 Blätter in einem DIN A0 Blatt enthalten sind. Folglich ist der Flächeninhalt eines DIN A4 Blattes $F_{A_4} = \frac{1}{16}m^2 = 0,0625m^2$. Mit den auf Millimeter gerundeten Werten erhalten wir $F_{A_4}^* = a_4^* \cdot b_4^* = 6237mm^2 = 0,06237m^2$, also ebenfalls eine sehr gute Näherung.

Die folgende Tabelle, die auch von Schülern zusammengestellt werden kann, gibt eine Übersicht über die Blattgrößen von DIN A0 bis DIN A7.

	DIN A0	DIN A1	DIN A2	DIN A3	DIN A4	DIN A5	DIN A6	DIN A7
a^*(in mm)	841	594	420	297	210	148	105	74
b^*(in mm)	1189	841	594	420	297	210	148	105
F (in m^2)	$1 = \frac{1}{2^0}$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{128} = \frac{1}{2^7}$

Natürlich kann man auch verschiedene rechteckige Alltagsgegenstände, z.B. Personalausweis, Fahrerlaubnis, Bankkarte, Krankenversicherungskarte, ..., vermessen und diese mit den Maßen des DIN A - Formates vergleichen.

An dieser Stelle wollen wir noch erwähnen, was es bedeutet, wenn wir beim normalen Druckerpapier von $80g$-Papier sprechen. Diese Masse-Angabe von $80g$ bezieht sich auf $1m^2$, d.h., dass das zugehörige DIN A0 Blatt aus dem selben Papier eine Masse von $80g$ hat. Da unser DIN A4 Blatt ein sechzehntel des DIN A0 Blattes ist, hat unser DIN A4 Blatt eine Masse von genau $5g$.

Zusammenfassend können wir sagen, dass das DIN A - Format durch die folgenden beiden Bedingungen festgelegt ist:

1. Beim Halbieren eines Blattes parallel zur kurzen Blattkante sollen zwei (gleichgroße) Blätter entstehen, die zum Ausgangsblatt ähnlich sind.

2. Der Flächeninhalt des Ausgangsblattes (DIN A0) beträgt $1m^2$.

Der große Vorteil dieses Papierformates ist, dass sich beim Halbieren immer wieder zueinander ähnliche Blätter ergeben, ohne dass ein Papierverlust (Abfall) entsteht. Dies ist wohl auch ein Grund, warum sich dieses Format (fast) international durchgesetzt hat. In Deutschland wurde dieses Format 1922 in der DIN-Norm DIN 476 festgelegt. Entwickelt wurde dieser Standard vom deutschen Ingenieur, Mathematiker und Normentheoretiker Walter Porstmann (1886 - 1959). Walter Porstmann war von 1912 bis 1914 Assistent des Chemie-Nobelpreisträgers Wilhelm Ostwald (1853 - 1932). Wilhelm Ostwald war Vorsitzender der „Brücke – Internationales Institut für Organisation der geistigen Arbeit“ und propagierte Papiergrößen mit dem Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$, welches er als Weltformat bezeichnete. Im Unterschied zu unserem DIN A Format, basiert das Weltformat auf der Basis von 1cm. Damit hatte das Ausgangsblatt eine Größe von $1cm \times 1,41cm$ [4]. Weitere Blätter ergeben sich durch Verdopplung.

Die deutsche DIN 476 diente 1975 als Grundlage für die europäische bzw. internationale Norm EN ISO 216, welche in fast allen Ländern angewendet wird. Ausnahmen bilden USA, Kanada und Mexiko, in denen andere, weniger systematische Formate verwendet werden.

Hier muss natürlich auch noch angemerkt werden, dass die DIN 476 neben der DIN A-Reihe, die dort auch als Hauptformat erklärt wurde, weitere Nebenformatreihen B, C, D enthält. Diese ordnen sich in die A-Reihe ein. Alle Blätter der Nebenreihen haben ebenfalls das Seitenverhältnis $\sqrt{2}$, die Ausgangsrechtecke B0, C0 und D0 sind aber nicht $1m^2$ groß. Erläuterungen dazu findet man auch in [2] und [7].

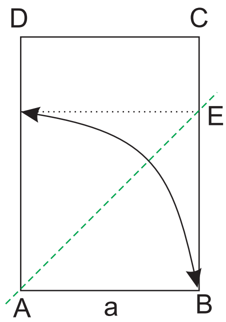

Bild 3a

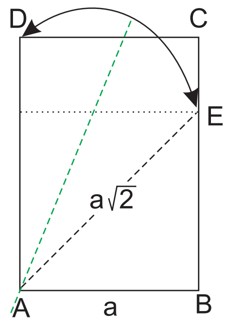

Bild 3b

Zu Ehren von Wilhelm Ostwald nennt Flachsmeyer [1] ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ Ostwaldsches Rechteck. Ostwaldsche Rechtecke haben viele interessante Eigenschaften. Bedenken wir z.B., dass in einem Quadrat mit der Seitenlänge a jede Diagonale die Länge $a\sqrt{2}$ hat, so können wir bei einem Rechteck $ABCD$ leicht überprüfen, ob es sich um ein Ostwaldsches Rechteck handelt. Dazu falten wir zuerst die Ecke B auf die Seite AD (Bild 3a), so dass die Faltkante durch A geht. Diese Faltlinie schneidet BC in E. AE ist eine Diagonale eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = |AB|$. Nun falten wir D auf E (Bild 3b) und drücken die entstehende Faltlinie fest an. Nur dann, wenn diese Faltlinie durch A geht, ist $ABCD$ ein Ostwaldsches Rechteck.

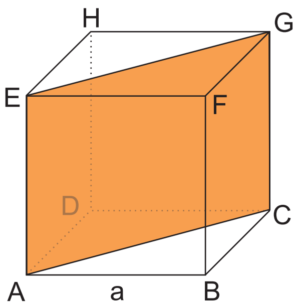

Bild 4

Auch beim Würfel tritt ein Ostwaldsches Rechteck auf. Gehen wir nämlich von einem Würfel $ABCDEFGH$ (Bild 4) mit der Kantenlänge a aus, dann hat jede Flächendiagonale die Länge $a\sqrt{2}$. Folglich ist jedes Rechteck (z.B. $ACGE$), das aus einem Paar paralleler Würfelkanten gebildet wird, ein Ostwaldsches Rechteck.

Weitere interessante Eigenschaften dieser Rechtecke sind in [5] und [6] enthalten.

Zum Abschluss soll natürlich nicht verschwiegen werden, dass bereits 1786 der Mathematiker, Physiker und Aphorismen-Dichter Georg Christoph Lichtenberg (1742 - 1799) auf das Papierformat mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ hingewiesen hat. Er schreibt an den deutschen Philosophen und Ökonomen Johann Beckmann (1739 - 1811):

„Ew. Wohlgebohren
kan ich nunmehr mit Zuverlässigkeit melden (denn ich weiß es aus dem Munde des HE. DeLuc selbst), daß London theils mit Basalt, theils mit Granit gepflastert ist. Ersterer kommt aus Schottland, letzerer aber aus den Insuln Jersey und Guernsey.
Können mir Ew. Wohlgebohren wohl nicht sagen, wo die Formen unserer Papiermacher gemacht werden, oder ob sie sie, woran ich zweifle, selbst machen? Die Veranlassung zu dieser Frage ist vielleicht Ew. Wohlgebohren nicht unangenehm. Ich gab einmal einem jungen Engländer, den ich in Algebra unterrichtete, die Aufgabe auf, einen Bogen Papier zu finden, bey dem alle Formate als forma patens, folio, 4to, 8, 16, einander ähnlich wären. Nach gefundenem Verhältniß wolte ich nun einem vorhandenen Bogen eines gewöhnlichen Schreib=Papiers mit der Scheere das verlangte Format geben, fand aber mit Vergnügen, daß er ihn würcklich schon hatte. Es ist nämlich das Papier worauf ich dieses Billet schreibe, dem ich aber, weil durch das beschneiden etwas von der eigentlichen Form verlohren gegangen seyn kan, noch einen unbeschnittenen beylege. Die kleine Seite des Rechtecks muß sich nämlich zu der großen verhalten wie $1 : \sqrt{2}$ oder wie die Seite des Quadrats zu seiner Diagonale.
Die Form hat etwas angenehmes und vorzügliches vor der gewöhnlichen. Sind den Papier=Formen machern wohl Regeln vorgeschrieben, oder ist diese Form durch Tradition nur ausgebreitet worden? und wo stammt diese Form die wohl nicht durch Zufall entstanden ist, her?
Ew. Wohlgebohren verzeyhen mit diese Freyheit.
[Göttingen,] den 25 Oct. 1786. GCLichtenberg“ [3]

Bereits während der Französischen Revolution (1789 bis 1799) wurde in Frankreich ein Papierformat mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ festgelegt, verschwand aber wieder.

Interessant ist für unsere Schüler sicher auch, dass vor der Vereinheitlichung unseres Papierformates eine Vielzahl unterschiedlicher Formate in Gebrauch waren. Hier einige Beispiele:

Name:	Oktav	Quart	Folio	Brief	Kanzlei, Doppelfolio	Propatria
Größe (mm):	142,5 × 225	225 × 285	210 × 330	270 × 420	330 × 420	340 × 430

und noch viele mehr, wie in [7] nachzulesen ist.

Eine schönes, für Schüler gut geeignetes Arbeitsheft zu diesem Thema ist die MatheWelt [2]. Dort wird unter anderem auch ein amerikanisches Papierformat vorgestellt und man findet das Normenblatt der DIN 476 abgedruckt.

Literatur

[1] Flachsmeyer, Jürgen: *Origami und Mathematik*. Heldermann Verlag, 2008.

[2] Kaganova, Ekaterina: *Das Geheimnis des DIN-Formates*. MatheWelt in „mathematik lehren“, Heft 167, August, 2011.

[3] Lichtenberg, Georg Christoph: *Briefwechsel*, Band III (1785–1792). Verlag C. H. Beck, 1990.

[4] Wilhelm Ostwald: *Die Weltformate: I. Für Drucksachen*. Fr. Seybold's Buchhandlung, 1911.

[5] Schmitz, Michael: *Quadrate*. Mathegami, Dezember, 2009.

[6] Schmitz, Michael: *Eine interessante Eigenschaft unseres Schreibpapiers*. Mathegami, September, 2011.

[7] Wikipedia: http://de.wikipedia.org/wiki/Papierformat

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.