MATHEGAMI

Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de September 2011

# Eine interessante Eigenschaft unseres Schreibpapiers

Michael Schmitz

**Zusammenfassung**

Fällt man von einer Ecke eines DIN A4 Blattes das Lot auf die Diagonale durch die benachbarten Eckpunkte, so schneidet das Lot die gegenüberliegende Rechteckseite in ihrem Mittelpunkt. Diese interessante Eigenschaft ist der Ausgangspunkt für die Überlegungen in dieser kleinen Betrachtung. Dabei wird gezeigt, dass diese Eigenschaft nur für Rechtecke gilt, die zum DIN A4 Blatt ähnlich sind. Bei unseren Überlegungen lernen wir auch einen Briefumschlag zu falten und finden eine Möglichkeit ein DIN A4 Blatt durch Falten sowohl längs als auch quer zu dritteln.

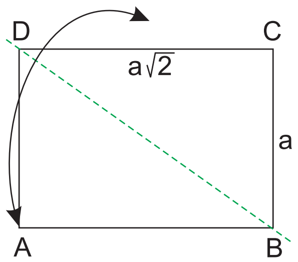


Bild 1a

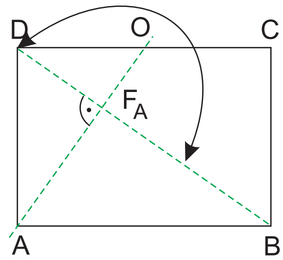


Bild 1b

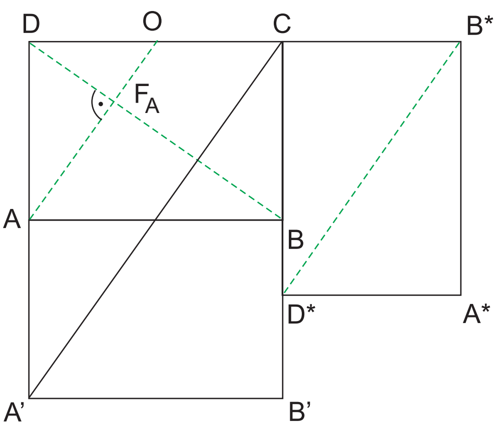


Bild 2

Betrachten wir ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $a$ und $a\sqrt{2}$, z.B. ein DIN A4 Blatt (vgl. [1]). Zuerst falten wir in dieses Rechteck die Diagonale $BD$ (Bild 1a). Anschließend falten wir $D$ so auf $BD$, dass die Faltlinie durch $A$ geht (Bild 1b). Diese Faltlinie steht natürlich senkrecht auf $BD$ und sie schneidet die Rechteckseite $CD$ im Punkt $O$, $F_A$ bezeichnet dabei den zugehörigen Lotfußpunkt auf $BD$. Falten wir $C$ auf $D$, so stellen wir fest, dass $O$ der Mittelpunkt von $CD$ sein könnte.

Wir überlegen uns nun, dass diese Vermutung richtig ist. Dazu drehen wir $ABCD$ um $C$ mit einem Drehwinkel von $90^0$ im mathematisch positiven Drehsinn und erhalten das Rechteck $A^*B^*CD^*$ mit der Diagonalen $B^*D^*$ (Bild 2).Wegen der Drehung durch $90^0$ und wegen $AO \perp BD$ ist $B^*D^* \| AO$. Nun verschieben wir $ABCD$ so, dass $D$ nach $A$ geht und erhalten das Rechteck $A'B'BA$.

Betrachten wir die beiden übereinander liegenden Rechtecke $ABCD$ und $A'B'BA$ als ein großes Rechteck $A'B'CD$, so ist in diesem Rechteck das Seitenverhältnis $|A'D| : |A'B'| = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, also z.B. ein DIN A3 Blatt. $A'B'CD$ ist natürlich zu $D^*A^*B^*C$ ähnlich. Diese beiden Rechtecke liegen auch so, dass die Diagonalen $D^*B^*$ und $A'C$ zueinander parallel sind. Da $D^*B^*$ auch parallel zu $AO$ ist, ergibt sich $A'C \| AO$. Nun erkennen wir im Bild 2 eine Strahlensatzfigur mit dem Scheitel bei $D$, den beiden von $D$ ausgehenden Strahlen $DC^+$ und $DA^+$ und den beiden Parallelen $AO$ und $A'C$. Da $A$ die Mitte von $A'D$ ist, muss wegen des Strahlensatzes auch $O$ die Mitte von $CD$ sein. Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Da die Ähnlichkeit zwischen einem Rechteck und dessen Hälfte nur für Rechtecke mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ (also solchen, die zu einem DIN A4 Blatt ähnlich sind) erfüllt ist, ergibt sich aus unserer Überlegung, dass unsere Vermutung auch nur für solche Rechtecke richtig ist.

Es ergibt sich damit:
*Genau dann, wenn ein Rechteck das Seitenverhältnis $\sqrt{2}$ hat, gilt:*
*Das Lot von einer Ecke des Rechtecks auf die Diagonale durch die benachbarten Ecken schneidet die Gegenseite in ihrem Mittelpunkt.*

Dies ist eine interessante Eigenschaft eines DIN A4 Blattes.

Wir geben noch einen zweiten Beweis für diesen Satz an. Dazu betrachten wir jetzt ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $a$ und $b$ (Bild 3). Es sei $|DO| = u$, $|OC| = v$, $|\angle DAO| = \alpha$ und $|\angle F_A DA| = \delta$. Dann gilt $tan\alpha = \frac{u}{b}$ und $tan\delta = \frac{a}{b}$.

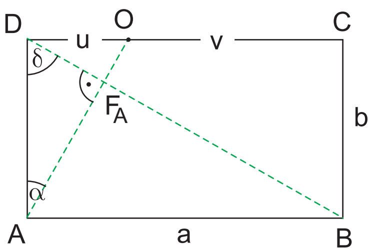

Bild 3

Weil $\alpha = 90^0 - \delta$ ist, gilt $tan(90^0 - \delta) = \frac{u}{b}$. Da aber $tan(90^0 - \delta) = \frac{sin(90^0-\delta)}{cos(90^0-\delta)} = \frac{cos\delta}{sin\delta} = \frac{1}{tan\delta}$ ist, ergibt sich $tan\alpha = \frac{1}{tan\delta}$, bzw. $\frac{u}{b} = \frac{1}{\frac{a}{b}}$, woraus $u = \frac{b^2}{a}$ folgt.

Bedenken wir noch, dass $v = a - u = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2-b^2}{a}$ ist, so ergibt sich für $u = v$ sofort $\frac{b^2}{a} = \frac{a^2-b^2}{a}$. Daraus erhalten wir aber $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Damit ist aber ABCD ein Rechteck, das zu einem DIN A4 Blatt ähnlich ist und unser Satz ist noch einmal beweisen.

Wir falten, ausgehend von Bild 1b, weiter die Senkrechte von $C$ auf $BD$, die $AB$ in ihrem Mittelpunkt $U$ (Bild 4a) schneidet – wie wir inzwischen wissen.

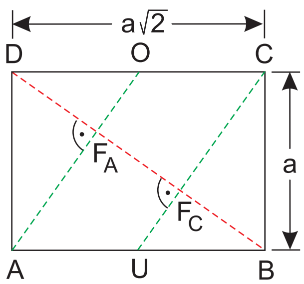

Bild 4a

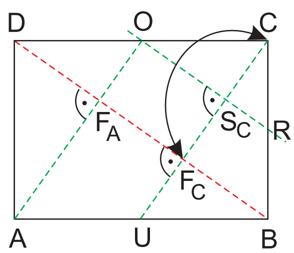

Bild 4b

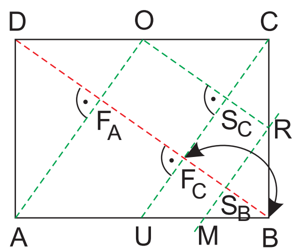

Bild 4c

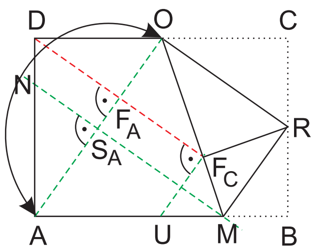

Bild 4d

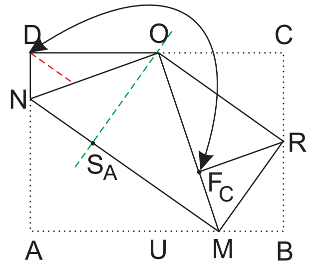

Bild 4e

Mit $F_C$ bezeichnen wir den zugehörigen Lotfußpunkt auf $BD$. Wir falten $C$ auf $F_C$ (Bild 4b). Die entstehende Faltlinie schneidet $F_C C$ in $S_C$, ist dort senkrecht und $S_C$ ist der Mittelpunkt von $F_C C$. Aufgrund des Strahlensatzes ergibt sich, dass diese Faltlinie durch $O$ geht und die Seite $BC$ im Mittelpunkt $R$ schneidet.

Falten wir noch $B$ auf $F_C$ (Bild 4c), so schneidet die entstehende Faltlinie $BD$ in $S_B$ und steht dort senkrecht. $S_B$ ist natürlich der Mittelpunkt von $BF_C$ und wegen des Strahlensatzes geht die Faltlinie durch $R$. Weiterhin schneidet diese Faltlinie $AB$ in $M$, dem Mittelpunkt von $UB$. Damit ist $|MB| = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ und $|AM| = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$. Außerdem ist $|\angle MRO| = 90^0$. Falten wir nun $B$ und $C$ auf $F_C$, so ergibt sich $|OM| = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$. Daher können wir $A$ auf $O$ falten, so dass die Faltlinie durch $M$ geht (Bild 4d). Diese Faltlinie schneidet $AO$ in $S_A$ und ist dort senkrecht. Weiterhin schneidet diese Faltlinie $AD$ in $N$. Aufgrund des Strahlensatzes (Zentrum $A$) ergibt sich $|ND| = \frac{1}{4}a$. Bild 4e zeigt die Situation nachdem die drei Dreiecke umgefaltet wurden.

Nun betrachten wir noch einmal Bild 4c. Dort erkennen wir mit Hilfe des Strahlensatzes (Zentrum $D$), dass $F_A$ der Mittelpunkt von $DF_C$

ist. Ebenso folgt mit dem Strahlensatz (Zentrum B), dass $F_C$ der Mittelpunkt von $F_AB$ ist. Folglich gilt $|DF_A| = |F_AF_C| = |F_CB|$, d.h., $F_A$ und $F_C$ teilen $BD$ in drei gleich große Strecken ein. Daher geht beim Umfalten von $D$ um $S_AO$ der Punkt $D$ auf $F_C$ (Bild 4f) und es entsteht ein neues Rechteck $S_AMRO$.

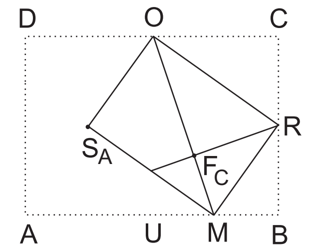


Bild 4f

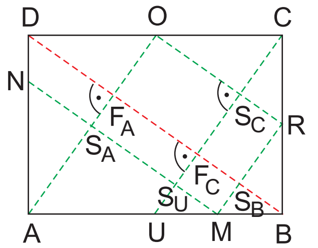


Bild 4g

Als nächstes berechnen wir die Seitenlängen dieses Rechtecks. Dazu betrachten wir das entfaltete Rechteck $ABCD$ mit allen Faltlinien (Bild 4g).

$|MR|$ ergibt sich mit Hilfe des Satzes des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck $MBR$, in dem $|BR| = \frac{1}{2}a$ und $|MB| = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$ ist. Es gilt $|MR| = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 + (\frac{1}{4}a\sqrt{2})^2} = \frac{a}{4}\sqrt{6}$.

Da beim Umfalten von $D$ und $B$ auf $F_C$ die Diagonale $BD$ doppelt übereinander liegt, gilt $|S_AM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$. Damit sind aber die Längen der Seiten des Rechtecks $S_AMRO$ berechnet.

Nun bestimmen wir das Verhältnis der Seitenlängen dieses Rechtecks. Wir berechnen $\frac{|S_AM|}{|MR|} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{4}\sqrt{6}} = \sqrt{2}$. Damit ist dieses Rechteck aber zum Ausgangsrechteck $ABCD$ ähnlich. Auch dies ist eine interessante Eigenschaft des DIN A4 Blattes.

Das zusammengefaltete Rechteck $S_AMRO$ kann als Brief (Bild 5) verwendet werden, wenn man vorher die Innenseite beschrieben hat und die drei, über $F_C$ zusammentreffenden Ecken des Ausgangsrechtecks z.B. mit Siegellack, einem Aufkleber mit der Absenderadresse oder ganz einfach nur mit einem Klebepunkt fixiert.

Bild 5

Betrachten wir Bild 4g noch einmal, so sehen wir, dass das Rechteck $S_AMRO$ durch die Faltlinien in vier kleinere Rechtecke zerlegt wird. Wir wollen nun noch die Seitenlängen und Seitenverhältnisse dieser Rechtecke bestimmen. Dazu bezeichnen wir noch den Schnittpunkt von $NM$ und $UC$ mit $S_U$.

Wir beginnen mit dem Rechteck $F_AF_CS_CO$:

$|F_AF_C| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$,

$|F_CS_C| = |S_BR| = \sqrt{|BR|^2 - (\frac{1}{2}|F_CB|)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}a)^2} = \frac{a}{6}\sqrt{6}$ und

$\frac{|F_AF_C|}{|F_CS_C|} = \frac{\frac{a}{3}\sqrt{3}}{\frac{a}{6}\sqrt{6}} = \sqrt{2}$. Damit ist aber $F_AF_CS_CO$ zu $ABCD$ ähnlich.

Nun betrachten wir $F_CS_BRS_C$:

$|F_CS_B| = \frac{1}{2}|F_CB| = \frac{1}{2}|F_AF_C| = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

$|S_BR| = \frac{a}{6}\sqrt{6}$ und

$\frac{|S_BR|}{|F_CS_B|} = \frac{\frac{a}{6}\sqrt{6}}{\frac{a}{6}\sqrt{3}} = \sqrt{2}$. Damit ist aber auch $F_CS_BRS_C$ zu $ABCD$ ähnlich.

Als nächstes Rechteck betrachten wir $S_UMS_BF_C$:

$|S_UM| = |F_CS_B| = \frac{a}{6}\sqrt{3}$,

$|MS_B| = |MR| - |S_BR| = \frac{a}{4}\sqrt{6} - \frac{a}{6}\sqrt{6} = \frac{a}{12}\sqrt{6}$ und

$\frac{|S_UM|}{|MS_B|} = \frac{\frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{a}{12}\sqrt{6}} = \sqrt{2}$. Damit ist aber auch $S_UMS_BF_C$ zu $ABCD$ ähnlich.

Zum Abschluss betrachten wir $S_AS_UF_CF_A$:

$|S_AS_U| = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, $|S_UF_C| = \frac{a}{12}\sqrt{6}$ und $\frac{|S_AS_U|}{|S_UF_C|} = \frac{\frac{a}{3}\sqrt{3}}{\frac{a}{12}\sqrt{6}} = 2\sqrt{2}$. Damit ist keine Ähnlichkeit von $S_AS_UF_CF_A$ zu $ABCD$ vorhanden. Aber wir bemerken, dass $|S_AS_U| = \frac{a}{3}\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{a}{6}\sqrt{3} = 2 \cdot |S_UM|$ ist. Folglich können wir das Rechteck $S_AS_UF_CF_A$ in zwei Rechtecke, die zu $S_UMS_BF_C$ kongruent sind, zerlegen.

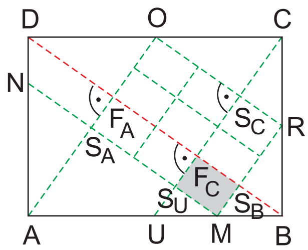


Bild 6a

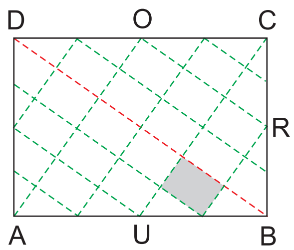


Bild 6b

Außerdem bemerken wir, dass $|S_BR| = \frac{a}{6}\sqrt{6} = 2 \cdot \frac{a}{12}\sqrt{6} = 2 \cdot |MS_B|$ ist, womit sich auch $F_CS_BRS_C$ in zwei, zu $S_UMS_BF_C$ kongruente Rechtecke, zerlegen lässt. Damit können wir aber auch $F_AF_CS_CO$ in vier solche kleine Rechtecke zerlegen. Dadurch wird $S_AMRO$ insgesamt in neun, zu $S_UMS_BF_C$ kongruente Rechtecke zerlegt, wie es im Bild 6a gezeigt ist.

Ergänzen wir die Figur durch weitere passende Faltlinien, so erhalten wir eine Einteilung des Ausgangsrechtecks $ABCD$ in kleine, zu $F_CS_BRS_C$ kongruente Rechtecke und Reststücke, die sich paarweise zu solchen kleinen Rechtecken ergänzen (Bild 6b). Durch Abzählen finden wir, dass für die Flächeninhalte $|S_UMS_BF_C| = \frac{1}{24}|ABCD|$ gilt.

Damit ergibt sich für die Fläche unseres Briefumschlages $|S_AMRO| = \frac{9}{24}|ABCD| = \frac{3}{8}|ABCD| < \frac{1}{2}|ABCD|$. Wenn unser Ausgangsrechteck $ABCD$ ein DIN A4 Blatt war, dann ist der gefaltete Briefumschlag also etwas kleiner als ein DIN A5 Blatt.

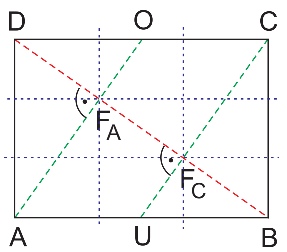


Bild 7

Greifen wir nun noch einmal die Eigenschaft der Punkte $F_A$ und $F_C$ auf $BD$ (Bild 4g) auf. Wir hatten oben festgestellt, dass diese beiden Punkte die Strecke $BD$ in drei kongruente Teile teilen. Falten wir nun durch $F_A$ und $F_C$ jeweils die Parallelen zu $AB$ bzw. $BC$ (Bild 7), so ergibt sich aufgrund des Strahlensatzes, dass diese Faltlinien das Rechteck $ABCD$ sowohl parallel zur langen, als auch parallel zur kurzen Rechteckseite dritteln. Diese Aufgabenstellung haben wir auch schon in [2] behandelt.

Eine weitere interessante Eigenschaft unseres Schreibpapiers wird in [3] erläutert:

*Schneidet man von einem Rechteck, das zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, das Quadrat über einer kurzen Seite und anschließend vom übrig gebliebenen Rechteck ebenfalls das Quadrat über einer kurzen Seite ab, so erhält man ein Rechteck, welches zum Ausgangsrechteck ähnlich ist.*

Daraus ergibt sich ein Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, sowie eine Kettenbruchdarstellung dieser Zahl.

Auch eine Umkehrung zur oben genannten Eigenschaft wird in [3] untersucht:

*Schneidet man von einem Quadrat ein Rechteck ab, dessen eine Seite mit einer Quadratseite übereinstimmt und das zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, bleibt ein Rechteck übrig. Dieses Rechteck lässt sich in zwei zueinander kongruente Quadrate und ein Rechteck, welches zu einem DIN A4-Papier ähnlich ist, einteilen.*

Daraus ergibt sich dann die Möglichkeit ein regelmäßiges Achteck aus einem quadratischen Papier zu falten.

## Literatur

[1] Schmitz, Michael: *Unser Schreibpapier – ein Blatt aus der DIN A4-Reihe*. Mathegami, September, 2011.

[2] Schmitz, Michael: *Drittelung eines DIN A4-Blattes*. Mathegami, Juni, 2010.

[3] Schmitz, Michael: *Quadrate*. Mathegami, Dezember, 2009.

### Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.