MATHEGAMI
Mathematik - Origami - Unterricht

www.mathegami.de März 2010

Würfelverdopplung

Michael Schmitz

Zusammenfassung
Im folgenden Beitrag geht es um die Verdopplung eines Würfels mit Hilfe von Zirkel und Lineal. Da eine solche Konstruktion nicht möglich ist, wird eine Würfelverdopplung mit Hilfe von zwei Winkelhaken angegeben. Diese Konstruktion soll von Platon stammen. Diese Konstruktion basiert auf der Idee von Hippokrates, der die Würfelverdopplung auf das Bestimmen der mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Größen zurückgeführt hat.
Anschließend wird das Einpassen der Winkelhaken auf das Falten von Papier übertragen. Die Richtigkeit der beiden Konstruktionen ist mit Mitteln der Schulgeometrie leicht zu beweisen.

Genau wie die Winkeldreiteilung (vgl. [4]) ist die Würfelverdopplung eines der großen Probleme der klassischen griechischen Geometrie. In [2], S. 5, wird eine historische Quelle zu diesem Problem angegeben:

> ,,Eratosthenes grüßt den König Ptolemäus.
> Es wird erzählt, daß einer der alten Tragiker den Minos (alten König von Kreta) auf die Szene gebracht habe, im Begriff, ein Grab für den Glaulos (seinen Sohn) herstellen zu lassen, und daß Minos, als er bemerkte, daß dieses Grab auf allen Seiten 100 Fuß lang war, gesagt habe:
>
> > Zu klein entwarfst du mir die Königliche Gruft,
> > Verdopple sie, des Würfels doch verfehle nicht!
> > Verdopple jede Kante schnell des Grabs!
>
> Nun ist klar, daß er sich geirrt hat. ... "

Da mit der Verdopplung eines Würfels das Doppelte seines Volumens gemeint ist, erkennen wir im obigen Text gleich einen Fehler. Denn das Verdoppeln der Kanten eines gegebenen Würfels verachtfacht dessen Volumen. Übrigens wird in [3], S.177, erwähnt, dass dieser Brief von Eratosthenes (um 230 v.u.Z.), der oben zitiert wurde, vermutlich gefälscht ist.

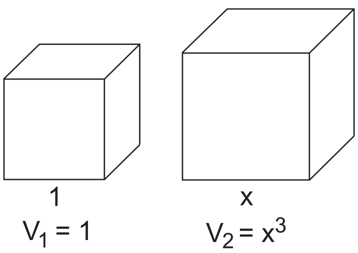

Bild 1

Gehen wir im Folgenden von einem Würfel mit der Kantenlänge 1 aus und betrachten dazu einen Würfel mit doppeltem Volumen (Bild 1). Die Kantenlänge x dieses Würfels ist gesucht.

Es gilt also $V_2 = 2 \cdot V_1$, das heißt
$x^3 = 2 \cdot 1$, woraus
$x = \sqrt[3]{2}$ folgt.

Das Problem der Würfelverdopplung besteht also darin, zu einer gegebenen Einheitsstrecke eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$ mit Hilfe eines idealen Zirkels und eines idealen Lineals, zu konstruieren.

Genau wie die Winkeldreiteilung gelang den Geometern des antiken Griechenlands die Würfelverdopplung allein mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht.

Erst durch Anwendung moderner algebraischer Methoden konnte 1837 der französische Mathematiker Pierre Laurent Wantzel (1814 - 1848) allgemein zeigen, dass auch die Würfelverdopplung mit Hilfe von Zirkel und Lineal prinzipiell nicht möglich ist (vgl. [3]).

Im obigen Brief des Eratosthenes wird weiter erwähnt, dass durch Hippokrates (um 440 v.u.Z.) die Würfelverdopplung auf das Problem des Findens der beiden mittleren Proportionalen x und y zu zwei gegebenen Größen g_1 und g_2, d.h. $g_1 : x = x : y = y : g_2$, zurückgeführt wurde. Aber auch dafür fand man keine Konstruktion nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal.

Die Geometer des antiken Griechenlands fanden aber auch Zeicheninstrumente, mit denen die mittleren Proportionalen bestimmt werden konnten. Einen guten Überblick dazu findet man in [2] bzw. in [3].

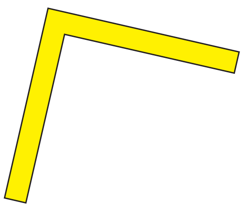

Bild 2

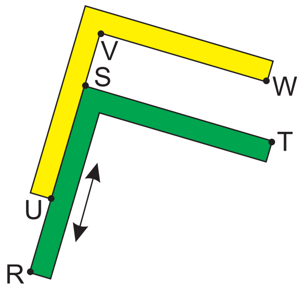

Bild 3

Wir zeigen hier die Konstruktion mittels zweier Winkelhaken. Diese Konstruktion wird von Eutokios (um 560) beschrieben, der sie Platon (427 - 347 v.u.Z.) zuschreibt (vgl. [3], S. 178). Ein solcher Winkelhaken ist im Bild 2 dargestellt und besteht aus zwei senkrecht in einer Ecke zusammentreffenden Leisten.

Zur Würfelverdopplung, d.h., zur Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$, benötigen wir zwei solche Winkelhaken, wobei der eine an einem Schenkel des anderen entlang gleiten kann. Diese Situation ist mit entsprechenden Bezeichnungen im Bild 3 gezeigt.

Gehen wir von einem Würfel mit der Kantenlänge 1 aus. Dieser Würfel soll nun verdoppelt werden. Dazu zeichnen wir zwei zueinander senkrechte Geraden a und b, die sich in O schneiden (Bild 4a). Auf a legen wir den Punkt A mit $|OA| = 1$ und auf b den Punkt B mit $|OB| = 2$ fest.

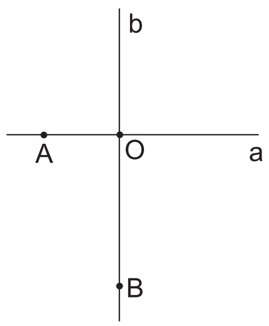

Bild 4a

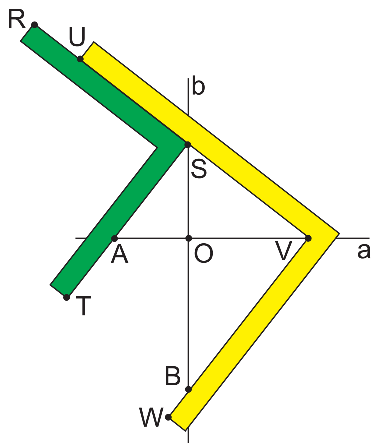

Bild 4b

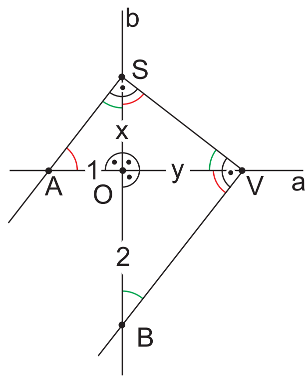

Bild 4c

Nun werden die Winkelhaken eingepasst. Dieses Einpassen erfolgt so (Bild 4b), dass V auf OA^- zu liegen kommt, während VW^+ durch B geht und gleichzeitig der zweite Winkelhaken so verschoben werden kann, dass S auf OB^- liegt, während ST^+ durch A geht. Damit man diesen Prozess besser nachvollziehen kann, wäre es an dieser Stelle sinnvoll, wenn man sich zwei solche Winkelhaken aus dünner Pappe bastelt und dies selbst ausprobiert.
Haben wir nun die Winkelhaken in die Figur so eingepasst, wie es gefordert wird, entsteht die im Bild 4c gezeigte Figur. In dieser Figur kommt es uns besonders auf die drei rechtwinkligen Dreiecke AOS; SOV und VOB an.
Diese drei Dreiecke sind zueinander ähnlich (www), da aufgrund des Einpassens der Winkelhaken bei S und V ebenfalls rechte Winkel sind.

Nun ist $|OA| = 1$ und $|OB| = 2$, und wir setzen $|OS| = x$ und $|OV| = y$. Wegen der Ähnlichkeit der drei genannten rechtwinkligen Dreiecke ergibt sich die fortlaufende Proportion $1 : x = x : y = y : 2$, in der x und y die beiden mittleren Proportionalen zu 1 und 2 sind. Damit ist aber das Problem der Bestimmung der beiden mittleren Proportionalen zu zwei gegebenen Größen (hier 1 und 2) mit Hilfe der Winkelhaken-Konstruktion gelöst.

Wir berechnen nun x und y, um zu sehen, dass dadurch auch das Problem der Würfelverdopplung gelöst ist.
Aus der obigen fortlaufenden Proportion ergeben sich insbesondere die beiden Gleichungen
(I): $\frac{1}{x} = \frac{x}{y}$ und (II): $\frac{1}{x} = \frac{y}{2}$.

Aus (I) erhalten wir $y = x^2$ und aus (II) folgt $y = \frac{2}{x}$. Durch Gleichsetzung dieser beiden Beziehungen erhalten wir $x^2 = \frac{2}{x}$, woraus $x^3 = 2$ und damit $x = \sqrt[3]{2}$ folgt. Damit entspricht die Länge der Strecke OS der gesuchten Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen und das Problem der Würfelverdopplung mit Hilfe des Einpassens von Winkelhaken ist gelöst.

Nun berechnen wir noch y. Aus (1): folgt $y = x^2$ und aus (II) erhalten wir $x = \frac{2}{y}$. Setzen wir die zweite in die erste Gleichung ein, so erhalten wir $y = (\frac{2}{y})^2$, woraus $y = \frac{4}{y^2}$, also $y^3 = 4$ und damit $y = \sqrt[3]{4}$ folgt. Dies ist aber gerade die Kantenlänge eines Würfels mit vierfachen Volumen bezüglich des Ausgangswürfels (Kantenlänge 1).
Damit bestimmen die beiden mittleren Proportionalen zu 1 und 2 die Kantenlängen von zwei Würfeln, der eine mit doppeltem und der andere mit vierfachem Volumen bezüglich des Ausgangswürfels.

Bevor wir uns der Würfelverdopplung mit dem Falten von Papier zuwenden, soll hier noch die Legende erzählt werden, wonach die Einwohner von Deli zur Überwindung einer Pestepidemie ein Orakel befragten. Dieses Orakel stellte ihnen die Aufgabe, den würfelförmigen Altar (mit Zirkel und Lineal) zu verdoppeln. Die Delier schickten Gesandte zu den Geometern in Platons Akademie mit der Bitte, diese Aufgabe zu lösen (vgl. [2]). Aus diesem Grund heißt die Aufgabe der Würfelverdopplung auch Delisches Problem.

Nun zum Papierfalten. Aus Bild 4c können wir eine Faltanleitung zur Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$ herleiten. Dazu spiegeln wir A, B und O an der Geraden s durch S und V und erhalten aus Bild 4c das Bild 5a. A', B', O', a' und b' sind die Bilder von A, B, O, a und b bei dieser Spiegelung. Fällen wir von A' das Lot auf b, so erhalten wir dort den Lotfußpunkt A^*. Weil $AOS \cong A'A^*S$ ist, gilt auch $|A'A^*| = 1$. Ebenso liefert das Lot von B' auf a den Lotfußpunkt B^*, und auch hier gilt $|B'B^*| = 2$, weil $BVO \cong B^*B'V$ ist.

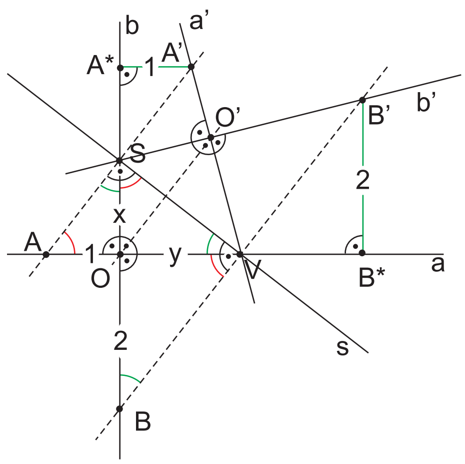

Bild 5a

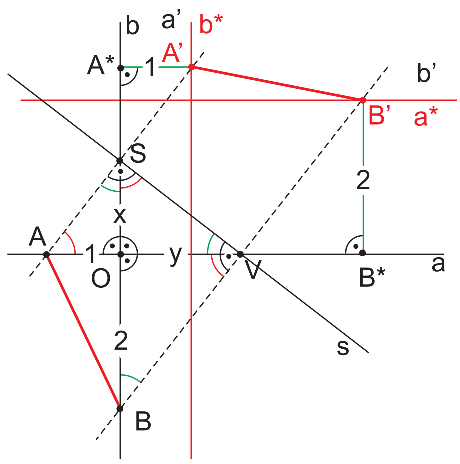

Bild 5b

Zeichnen wir nun durch A' die Parallele b^* zu b und durch B' die Parallele a^* zu a, so haben b, b^* den Abstand 1 und a, a^* den Abstand 2, wie es im Bild 5b gezeigt ist. Diese beiden Parallelen sind unabhängig von der Lage der beiden Punkte S und V.

Bedenken wir nun noch, dass wegen der Spiegelung an s auch $|AB| = |A'B'|$ ist, so können wir die folgende Aufgabe formulieren:
Finde in der Ausgangssituation, wie sie im Bild 5c dargestellt ist, eine Geradenspiegelung so, dass dabei A auf b^* und gleichzeitig B auf a^* abgebildet werden.

Wenn wir die zugehörige Spiegelgerade s gefunden haben, dann bestimmt diese auf a und b die Punkte V und S und damit auch $\sqrt[3]{4}$ und $\sqrt[3]{2}$, wie wir uns das vorher überlegt haben. Diese Spiegelachse s lässt sich als Faltlinie auffassen, die beim Falten von Papier entsteht. Dazu müssen wir auf einem Blatt Papier zuerst die Ausgangssituation von Bild 5c erzeugen. Wir benutzen ein quadratisches Blatt Papier mit der Seitenlänge 8, um zu einem Würfel mit der Seitenlänge 1 durch Falten von Papier eine Strecke mit der Länge $\sqrt[3]{2}$ zu bestimmen.

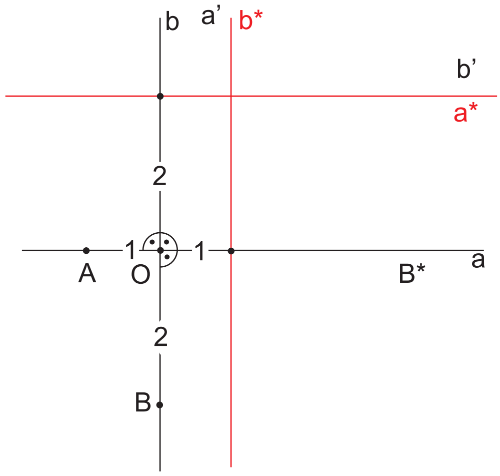

Bild 5c

Im ersten Schritt wird das Ausgangsquadrat parallel zu beiden Kanten halbiert (Bild 6a). Dadurch entstehen die beiden Faltlinien a und b, die sich in O schneiden.

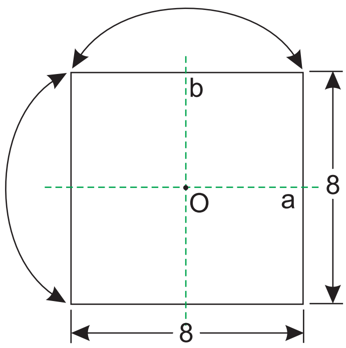

Bild 6a

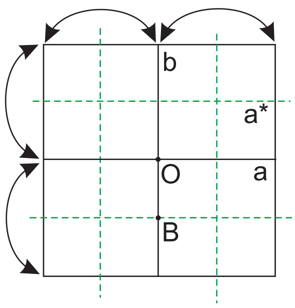

Bild 6b

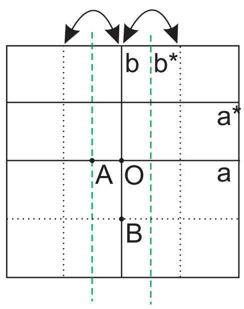

Bild 6c

Nun werden die vier entstandenen Rechtecke entsprechend Bild 6b parallel zu den langen Kanten halbiert. Die ‘oberhalb’ von a liegende (zu a parallele) Faltlinie bezeichnen wir mit a^*, und den Schnittpunkt der ‘unter’ a liegenden Faltlinie mit b nennen wir B.

Als Nächstes werden die beiden ‘inneren’ Rechtecke mit der Seite b parallel zu dieser halbiert, wie es im Bild 6c gezeigt ist. Die ‘rechts’ von b liegende Faltlinie bezeichnen wir mit b^* und die ‘linke’ schneidet a in A.
Weil das Ausgangsquadrat die Kantenlänge 8 hatte, ist $|OA| = 1$, $|OB| = 2$ und $|\sphericalangle AOB| = 90^o$. Damit haben wir die gleiche Situation wie im Bild 5c erzeugt.

Nun kommt auch hier das Einpassen. Dazu wird so gefaltet, dass A auf b^* und gleichzeitig B auf a^* zu liegen kommt. A' und B' sind die zugehörigen Bildpunkte und s die Faltlinie, die b in S und a in V schneidet, wie es im Bild 6d dargestellt ist.

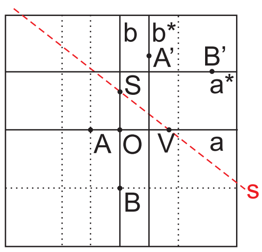

Bild 6d

Zur praktischen Ausführung dieser Faltung ist es empfehlenswert das Quadrat erst durch A und B nach ‘hinten’ umzufalten, wie es im Bild 6e zu sehen ist. Anschließend kann man das, zum Teil doppelliegende Papier so umfalten, dass A und B entsprechend den Forderungen auf b^* und a^* eingepasst werden, wie es im Bild 6f zu sehen ist.

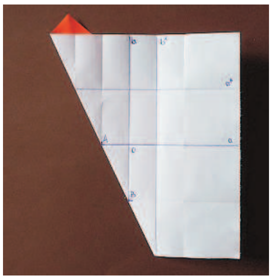

Bild 6e

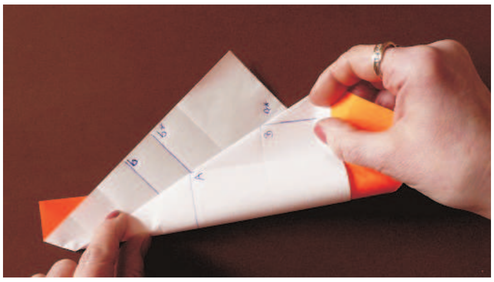

Bild 6f

Weil A' und B' die Bildpunkte von A und B bei der Spiegelung an s sind (Bild 6d), stehen AA' und BB' senkrecht auf s. Damit ist aber die gleiche Figur entstanden, die bereits im Bild 4c zu sehen war und die mit Hilfe der Winkelhaken konstruiert wurde. Damit ist aber auch klar, dass OS die gesuchte Länge $\sqrt[3]{2}$ hat. Der Beweis hierfür kann unabhängig von der Konstruktion mit den Winkelhaken auch über die Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke AOS, SOV, BVO geführt werden.

Damit ist die Würfelverdopplung auch mit Hilfe des Faltens von Papier gelöst. Auch dabei spielte das Einpassen einer Strecke eine wichtige Rolle. Da die Würfelverdopplung nicht mit Zirkel und Lineal möglich ist, muss das Einpassen der Punkte A und B auf b^* und a^* eine Faltoperation sein, die nicht mit Zirkel und Lineal nachvollziehbar ist.

Die oben, auf Basis der Winkelhaken-Konstruktion entwickelte Faltung zur Würfelverdopplung wird ebenfalls in [1] beschrieben.

Literatur

[1] Bläuenstein, Ernst: *Geometrische Konstruktionen 3.Grades mittels Papierfaltung.* Sonderheft von Origami Deutschland, 1977.

[2] Breidenbach, Walter: *Das Delische Problem (Die Verdopplung des Würfels).* B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 2. Auflage, 1952.

[3] Kaiser, Hans; Nöbauer, Wilfried: *Geschichte der Mathematik.* Oldenbourg, 3. Auflage, 2002.

[4] Schmitz, Michael: *Winkeldreiteilung.* Mathegami.

Schlussbemerkung

Die hier gezeigten Faltbeispiele sollen Anregungen geben, im Mathematikunterricht unserer Schulen das Falten von Papier zu nutzen, um mathematische Inhalte entdecken zu lassen, einzuführen oder zu üben. Die Möglichkeiten dazu sind vielfältig.

Auf der Internetseite `www.mathegami.de` findet man weitere Beispiele. Ich würde mich freuen, von Ihnen Hinweise, Anregungen oder Erfahrungsberichte zu dieser Thematik zu erhalten. Schreiben Sie mir eine E-Mail (michael.schmitz@uni-jena.de) oder benutzen Sie das Forum auf der oben genannten Internetseite.