Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz

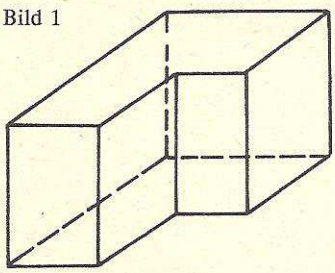
Die folgenden Ausführungen beziehen sich nur auf konvexe Polyeder. Für diese Polyeder gilt der Eulersche Polyedersatz:

Ist P ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten, so gilt

$$e + f - k = 2. \qquad (1)$$

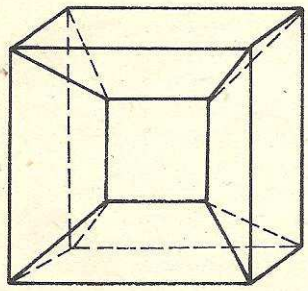
Dieser Satz wurde bereits in der *alpha*, Heft 4/1983 behandelt.
Jedoch wollen wir noch einmal darauf hinweisen, daß es auch nichtkonvexe Polyeder gibt, für die (1) gilt.
Ein solches Beispiel zeigt Bild 1.

Bild 1



$e = 12$
$f = 8$
$k = 18$

Bild 2



$e = 12$
$f = 12$
$k = 24$

Bild 2 zeigt aber ein nichtkonvexes Polyeder das (1) nicht erfüllt.
Die folgenden Ergebnisse stammen von *Leonhard Euler* (1707 bis 1783). In dem Buch *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder* von *Ernst Steinitz* (1871 bis 1928) sind diese Ergebnisse (ebenfalls) zusammenfassend dargestellt.
Nun betrachten wir für das Weitere ein konvexes Polyeder P mit e Ecken, f Flächen und k Kanten und bezeichnen mit $p_1, p_2, \ldots, p_f$ die Anzahl der Kanten jeder Fläche sowie mit $q_1, q_2, \ldots, q_e$ die Anzahl der Kanten, die von jeder Ecke von P ausgehen.

1. Da P ein konvexes Polyeder ist, hat natürlich jede Polyederfläche mindestens drei Kanten, und von jeder Polyederecke gehen ebenfalls mindestens drei Kanten aus. Es gilt also

$$p_i \geqq 3 \quad \text{und} \quad q_j \geqq 3, \qquad (2)$$

wobei $i = 1, 2, \ldots, f$ und $j = 1, 2, \ldots, e$ gilt.
Summieren wir nun die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_f$ und die Zahlen $q_1, q_2, \ldots, q_e$, so erhalten wir jeweils die doppelte Anzahl der Kanten, da bei dieser Addition jede Kante doppelt gezählt wurde. Es gehört nämlich jede Kante zu genau zwei Flächen, und zu jeder Kante gehören genau zwei Ecken des Polyeders. Damit gelten

$$2k = p_1 + p_2 + \ldots + p_f \qquad (3)$$

und $\quad 2k = q_1 + q_2 + \ldots + q_e.$

Aus den Gleichungen (3) folgt aber mit (2) sofort, daß

$$2k = p_1 + p_2 + \ldots + p_f \geqq 3f$$

und $\quad 2k = q_1 + q_2 + \ldots + q_e \geqq 3e,$

also $\quad 2k \geqq 3f \qquad (4)$

und $\quad 2k \geqq 3e$ gelten. $\qquad (5)$

Nehmen wir zu der Ungleichung (4) noch die Eulersche Formel (1) hinzu, so erhalten wir $2k \geqq 3f = 3(2 + k - e)$, woraus $3e \geqq k + 6$ folgt. Zusammen mit der Ungleichung (5) gilt dann

$$2k \geqq 3e \geqq k + 6. \qquad (6)$$

Analog folgt aus (5) unter Verwendung der Eulerschen Formel (1) und der Ungleichung (4), daß

$$2k \geqq 3f \geqq k + 6 \quad \text{gilt.} \qquad (7)$$

Aus (6) und (7) folgt gleichzeitig, daß $2k \geqq k + 6$ ist, und damit gilt für jedes konvexe Polyeder P

$$k \geqq 6. \qquad (8)$$

Damit hat also jedes konvexe Polyeder mindestens sechs Kanten; die Tetraeder (dreiseitige Pyramiden) haben genau sechs Kanten. Es ist erstaunlich, daß es kein konvexes Polyeder gibt, das genau sieben Kanten hat. Wir werden dies gleich zeigen. Mit der Ungleichung (8) können wir aus (6) und (7) sofort schlußfolgern, daß

$$e \geqq 4 \quad \text{und} \quad f \geqq 4 \quad \text{gilt.} \qquad (9)$$

Nun nehmen wir an, daß es ein konvexes Polyeder P_1 mit genau sieben Kanten gibt. Da für dieses Polyeder auch die Eulersche Formel (1) mit $k = 7$ gelten muß, haben wir $e + f - 7 = 2$ und damit

$$e + f = 9. \qquad (10)$$

Wegen der Ungleichungen (9) kann P_1 nur ein Polyeder mit $e = 4$ und $f = 5$ oder $e = 5$ und $f = 4$ sein.
Im ersten Fall bedenken wir, daß das *einzige* Polyeder mit $e = 4$ nur ein Tetraeder sein kann. Ein Tetraeder hat aber nur 4 Flächen.
Im zweiten Fall bedenken wir, daß ein Polyeder mit $f = 4$ auch nur ein Tetraeder sein kann. Dieses Tetraeder hat aber genau 4 Ecken.
Folglich gibt es kein solches Polyeder P_1, und damit gibt es kein konvexes Polyeder mit genau sieben Kanten.

Aufgabe 1

Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $k = 8, 9, 10, \ldots$ Kanten gibt.
Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken gibt.
Zeige, daß es konvexe Polyeder mit $f = 5, 6, 7, \ldots$ Flächen gibt.

2. Bevor du hier weiterliest, versuche ein konvexes Polyeder zu finden, das entweder nur von Sechseckflächen begrenzt wird, oder bei dem von jeder Ecke genau sechs Kanten ausgehen.
Selbst nach längerem Probieren wirst du wohl kein solches Polyeder gefunden haben, und wir vermuten, daß es solche nicht geben kann. Zum Beweis dieser Vermutung bezeichnen wir mit

$p = \dfrac{p_1 + p_2 + \ldots + p_f}{f}$ die mittlere Kantenzahl der Flächen und mit

$q = \dfrac{q_1 + q_2 + \ldots + q_e}{e}$ die mittlere Kantenzahl der Ecken eines konvexen Polyeders P. Wegen (3) gilt

$$p = \frac{2k}{f} \qquad (11)$$

und $\quad q = \dfrac{2k}{e} \qquad (12)$

Nun stellen wir (7) etwas um.
Es gilt sicher $k + 6 \leqq 3f$, woraus sofort $2k \leqq 6f - 12$ folgt.
Daraus erhalten wir

$$\frac{2k}{f} \leqq 6 - \frac{12}{f}. \qquad (13)$$

Weil $\dfrac{12}{f}$ stets positiv ist, ist

$6 - \dfrac{12}{f} < 6$ stets richtig. Damit gilt

$\dfrac{2k}{f} < 6$ und mit der Beziehung (11) gilt

$$p < 6. \qquad (14\,a)$$

Analog erhalten wir aus der Ungleichung (6) unter der Verwendung der Beziehung (12), daß

$$q < 6 \quad \text{gilt.} \qquad (14\,b)$$

Aus der Ungleichung (14 a) folgt nun, daß es kein konvexes Polyeder gibt, das nur durch Sechseckflächen begrenzt wird. Entsprechend folgt aus (14 b), daß es kein konvexes Polyeder gibt, bei dem von jeder Ecke genau sechs Kanten ausgehen.

3. Um eine weitere interessante Eigenschaft von konvexen Polyedern herzuleiten, bezeichnen wir mit $f_3, f_4, \ldots$ die Anzahl der Flächen mit genau 3, 4, ... Kanten und mit $e_3, e_4, \ldots$ entsprechend die Anzahl der Ecken, von denen genau 3, 4, ... Kanten ausgehen.
Es ist klar, daß

$f_3 + f_4 + f_5 + \ldots = f$ und

$e_3 + e_4 + e_5 + \ldots = e$ ist $\qquad (15)$,

wobei die linken Seiten dieser Gleichungen natürlich aus endlich vielen Summanden bestehen. Außerdem überlegen wir uns leicht, daß

$3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots = 2k$ und

$3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + \ldots = 2k \qquad (16)$

gilt. Aus den Gleichungen (15) folgt

$$4f_3 + 4f_4 + 4f_5 + \ldots = 4f \quad \text{und}$$
$$4e_3 + 4e_4 + 4e_5 + \ldots = 4e. \qquad (17)$$

Subtrahieren wir nun die Gleichungen (16) von den entsprechenden Gleichungen (17), so erhalten wir

$$f_3 - 1f_5 - 2f_6 - \ldots = 4f - 2k \quad \text{und}$$
$$e_3 - 1e_5 - 2e_6 - \ldots = 4e - 2k. \qquad (18)$$

Die beiden Gleichungen (18) werden nun nach f_3 bzw. e_3 umgestellt.
Wir erhalten

$$f_3 = 4f - 2k + 1f_5 + 2f_6 + \ldots \quad \text{und}$$
$$e_3 = 4e - 2k + 1e_5 + 2e_6 + \ldots$$

Nun addieren wir noch diese beiden Gleichungen und erhalten

$$f_3 + e_3 = 4f + 4e - 4k + (f_5 + e_5) + 2(f_6 + e_6) + \ldots$$

Nun ist aber $f_5 + e_5 \geqq 0$, $f_6 + e_6 \geqq 0$, ..., und folglich erhalten wir

$$f_3 + e_3 \geqq 4(f + e - k). \qquad (19)$$

Nun erkennen wir sofort, daß wir wieder die Eulersche Polyederformel (1) anwenden können, und wir erhalten aus der Ungleichung (19), daß

$$f_3 + e_3 \geqq 8 \quad \text{ist.} \qquad (20)$$

Das heißt, daß in jedem konvexen Polyeder die Summe aus der Anzahl der Dreiecksflächen und der Ecken, von denen genau drei Kanten ausgehen, mindestens acht ist.
Eine abgeschwächte, aber auch interessante Interpretation von (2) besagt, daß es kein Polyeder gibt, in dem gleichzeitig Dreiecksflächen und Ecken mit genau drei Kanten fehlen.
Oder: Ein Polyeder ohne Dreiecksflächen hat mindestens acht Ecken, von denen genau drei Kanten ausgehen.
Ein Beispiel dazu ist der Würfel.
Das Oktaeder liefert uns ein Beispiel für ein Polyeder, das keine Ecken hat, von denen genau drei Kanten ausgehen. Das Oktaeder hat aber acht Dreiecksflächen.
Beim Tetraeder ist $e_3 = f_3 = 4$.

Aufgabe 2

Zwei konvexe Polyeder sollen vom gleichen Typ heißen, wenn sie dieselbe Anzahl von Flächen, Ecken und Kanten haben, und wenn von einander entsprechenden Ecken die gleiche Anzahl von Kanten ausgeht. Zum Beispiel gehören Würfel und Quader zum selben Typ. Im Bild 3 sind zwei konvexe Polyeder dargestellt, die jeweils fünf Flächen haben, aber nicht vom gleichen Typ sind.

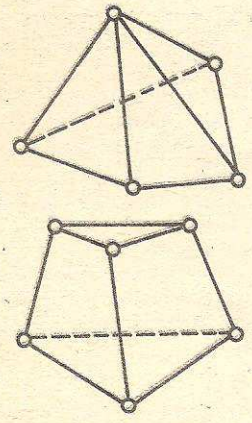


Bild 3

Unter allen konvexen Polyedern mit genau fünf Flächen gibt es nur die zwei oben gezeigten Typen.
Beweise diese Aussage!
Versuche alle Typen von konvexen Polyedern zu finden, die genau sechs Flächen haben.
Gib zu jedem Typ ein Beispiel an!

Aufgabe 3

Unter einem Flächenwinkel eines konvexen Polyeders P verstehen wir einen Innenwinkel eines Polygons von P.
Zeige, daß die Summe aller Flächenwinkel eines konvexen Polyeders stets $2\pi(k - f)$ ist.

Aufgabe 4

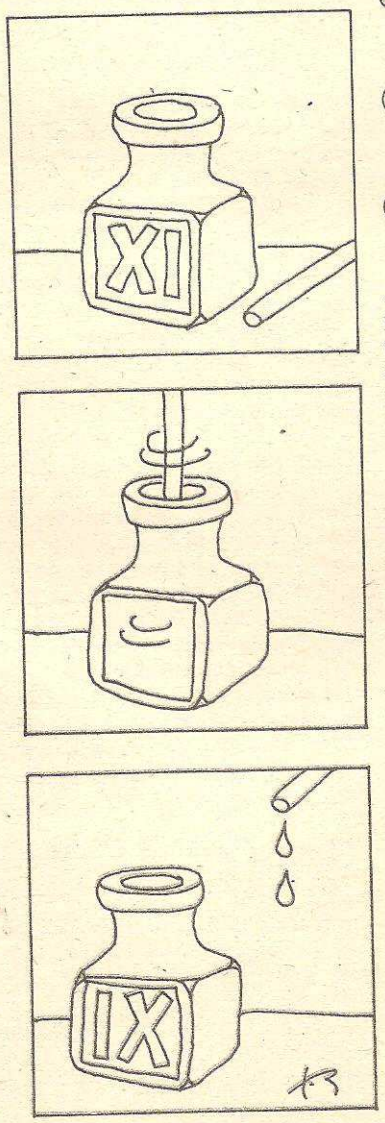
Gibt es Tetraeder, bei denen jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels von einem Flächenwinkel ist?

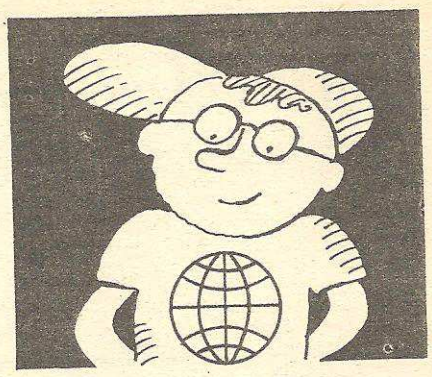
M. Schmitz

Die Lösungen erscheinen im Heft 4/90

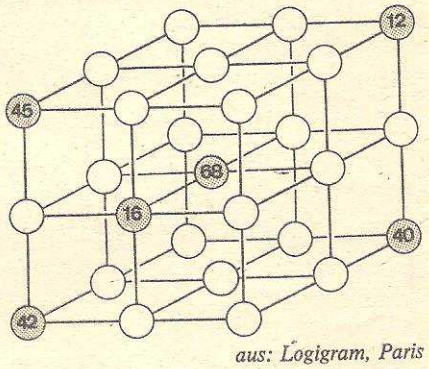
---

aus: Funktio, Helsinki





▲1▲ **Jeu de billes**
Placez dans chacune des sphères vides l'un des nombres suivants: 6–7–9–10–11–14–16–17–20–23–24–25–28–31–33–37–41–42–51–57, de manière à toujours obtenir le même total de 249 en additionnant les valeurs contenues dans neuf sphères situées dans un même plan.
N.B.: les sphères concernées sont réparties dans neuf plans différents.

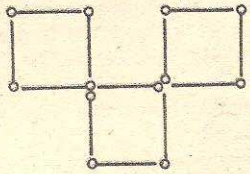


aus: Logigram, Paris

▲2▲ С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: либо заменять его удвоенным, либо стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?

aus: Quant, Moskau

▲3▲ **Still Square—but up in the air**
The drawing shows twelve matches put together to form three unit squares. Using the same number of matches, can you make six unit squares?



aus: Fun with mathematics, Toronto

Kein niederländisches Wörterbuch im Haus? Probiert es doch mal ohne!

▲4▲ Gegeven zijn twee op elkaar volgende priemgetallen p en q, beide groter dan 2 (tussen p en q bevinden zich dus geen andere priemgetallen). Bewijs dat de som $p + q$ geschreven kan worden als het produkt van drie natuurlijke getallen groter dan 1.

aus: Pythagoras, Amsterdam

Lösungen

Lösungen zu: Zwei Eigenaufgaben aus der MSG Greifswald
Heft 2/90

Aufgabe von Jan Fricke
Wenn der Stapel gleich viele Büchsen jeder Sorte enthalten soll, muß die Gleichung
$4n + 2k - 6 = \frac{k(2n+1-k)}{2}$ gelten.
Die Bedingungen $n \geqq k$ und $n, k \in N$ gestatten die Lösungen $n = 14$, $k = 5$ und $n = k = 0$. Die letztere „ist keine Lösung im Sinn der Aufgabenstellung, sie ist jedoch praxisnäher" (J. F.).

Aufgaben von René Schöne
Der Winkel $\alpha = \measuredangle DAB$ variiert zwischen α_0 und α_1 mit $\cos\alpha_0 = \frac{7}{9}$ und $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$, wobei α_0 und α_1 die Winkel des Dreiecks mit den Seitenlängen $3x$, $3x$, $2x$ sind, welches als Grenzfall entsteht, wenn D auf $\overline{AC}$ oder C auf $\overline{BD}$ liegt. Aus Symmetriegründen braucht nur der Fall $60° \leqq \alpha \leqq \alpha_1$ behandelt werden. Sei M der Mittelpunkt des Inkreises. Wir verwenden
$p := \frac{\overline{AM}}{x}$ als Parameter und erhalten
$Q(p) = \frac{7+72}{(4p^4 - 24p^2 - 9)}$.
Es gilt $p^2 = \frac{3}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{3} + \frac{1}{2p}$.
Diese Gleichung ist für $\sqrt{\frac{3}{2}} \leqq p \leqq \sqrt{3}$ eindeutig umkehrbar. Dort ist Q monoton wachsend, nimmt sein Maximum $\frac{27}{5}$ bei 3 an, $\alpha = 60°$. Das Minimum 5 wird erst im Entartungsfall $p = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\alpha = \alpha_1$ angenommen.

Lösung zu: Kryptarithmetische Knobelaufgabe
Heft 3/90

Wir sind es gewöhnt, bei Additionen oder Subtraktionen die betreffenden Zahlen senkrecht untereinander zu schreiben. Damit erhalten wir z. B. folgende Gleichung:

$$\begin{array}{r} E\,I\,C \\ -\;\;I\,H \\ \hline G\,B\,C \end{array} \qquad (1)$$

Wegen: $C - H = C$ folgt $H = 0$ und wegen $I - I = B$ folgt $B = 0$! Also steckt der Fehler schon hier in dieser Gleichung!
Eine weitere Gleichung ist:
$$II \cdot DC = BCG. \qquad (2)$$
Hieraus folgt aber, daß B nicht Null sein kann! Damit haben wir die Aussage $H = 0$ und $B \neq 0$! Deshalb ist in der Gleichung (1) ein Buchstabe I durch K zu ersetzen!
Weil der Ausdruck $\overline{IH}$ falsch ist, (unter Voraussetzung, die wir eben begründet haben) schreiben wir dafür jetzt KH. Damit heißt die Gleichung (1) jetzt:
$$EIC - KH = GBC.$$
Die Lösung der Aufgabe ist:

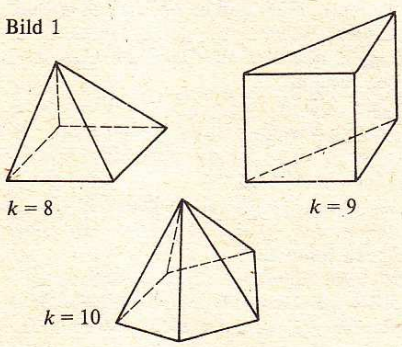
$$\begin{array}{rcl} 924 & - & 50 = 874 \\ : & + & - \\ 22 & \cdot & 34 = 748 \\ \hline 42 & + & 84 = 126 \end{array}$$

Die einzelnen Buchstaben haben folgende Ziffernzuordnung:
$A = 1$, $B = 7$, $C = 4$, $D = 3$, $E = 9$, $F = 6$, $G = 8$, $H = 0$, $I = 2$, $K = 5$.

Lösungen zu: Einige Folgerungen aus dem Eulerschen Polyedersatz
Heft 3/90

▲1▲ a) Wir geben zuerst je ein Beispiel für ein Polyeder mit $k = 8$, $k = 9$ und $k = 10$ an (Bild 1):

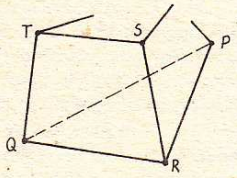
Bild 1



Errichten wir nun über einer Dreiecksfläche jedes Polyeders ein Tetraeder, so entsteht ein neues Polyeder, das jeweils drei Kanten mehr als das Ausgangspolyeder sowie weitere Dreiecksflächen enthält. Außerdem kann man die Höhe des angesetzten Tetraeders stets so wählen, daß das neu entstandene Polyeder konvex ist. Dieses Verfahren können wir fortsetzen, womit die Aufgabe gelöst ist.
b) Wir können sehr leicht Beispiele für Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken angeben. Dazu betrachten wir in der Ebene ein regelmäßiges $(e-1)$-Eck, $e \geqq 5$, und errichten darüber eine gerade Pyramide. Damit ist ein konvexes Polyeder mit $e = 5, 6, 7, \ldots$ Ecken entstanden.
c) Als Beispiel für Polyeder mit $f = 5, 6, 7, \ldots$ Flächen eignen sich ebenfalls die geraden Pyramiden mit regelmäßiger Grundfläche. Vergrößern wir nämlich die Anzahl der Ecken der Grundfläche um eins, so erhöht sich die Anzahl der Flächen des Polyeders ebenfalls um eins. Da es eine gerade Pyramide mit fünf Flächen (quadratische Grundfläche) gibt, ist diese Aufgabe gelöst.

▲2▲ Wir zeigen, daß es unter allen konvexen Polyedern mit genau fünf Flächen genau zwei Typen gibt.
Dazu bedenken wir, daß es keine Polyederecke eines Polyeders mit genau fünf Flächen geben kann, in der fünf Flächen zusammentreffen. Außerdem treffen in jeder Polyederecke mindestens drei Flächen zusammen.
Es entstehen zwei Fälle:
1. Ein Polyeder mit genau fünf Flächen enthält (mindestens) eine Ecke, in der genau vier Flächen zusammentreffen.
Dann muß die fünfte Fläche aber die anderen vier Flächen schneiden, und es entsteht eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche.
2. Ein Polyeder mit genau fünf Flächen enthält nur Ecken, in denen genau drei Flächen zusammentreffen.
Aus dem Eulerschen Polyedersatz folgt dann mit $f = 5$ und $k = \frac{3}{2} \cdot e$, daß $e = 6$ und $k = 9$ ist. Enthält ein Polyeder ein p-Eck, so hat dieses Polyeder wenigstens $2p$ Kanten. Folglich enthält ein Polyeder mit genau fünf Flächen in diesem Fall höchstens Vierecke.
Würde ein solches Polyeder nur Vierecke enthalten, so hätte es $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot f = 10$ Kanten.
Würde ein solches Polyeder nur Dreiecke enthalten, so hätte es $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot f = 7{,}5$ Kanten.
Folglich muß ein Polyeder mit genau fünf Flächen in diesem Fall wenigstens ein Dreieck und ein Viereck enthalten. Dann muß es eine Kante QR geben, an der ein Dreieck und ein Viereck zusammentreffen (Bild 2).

Bild 2



P sei der dritte Eckpunkt des Dreiecks und S, T die weiteren Ecken des Vierecks. Da in diesem Fall von jeder Ecke genau drei Kanten ausgehen, muß von P, S und T jeweils noch genau eine weitere Kante ausgehen. Damit haben wir bereits die neun Kanten, die uns zur Verfügung stehen, verbraucht, denn P kann nicht mit S bzw. T durch eine Kante verbunden werden. Da unser Polyeder sechs Ecken hat, müssen sich die freien Kanten von P, S und T in einem Punkt U treffen. Das entstandene Polyeder hat genau fünf Flächen. Damit ist gezeigt, daß es genau zwei Typen von Polyedern mit genau fünf Flächen gibt. Ohne Beweis soll mitgeteilt werden, daß es sieben verschiedene konvexe Polyedertypen mit genau sechs Flächen gibt. Die Bilder zeigen zu jedem Typ ein Beispiel.

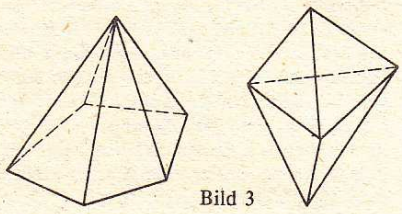
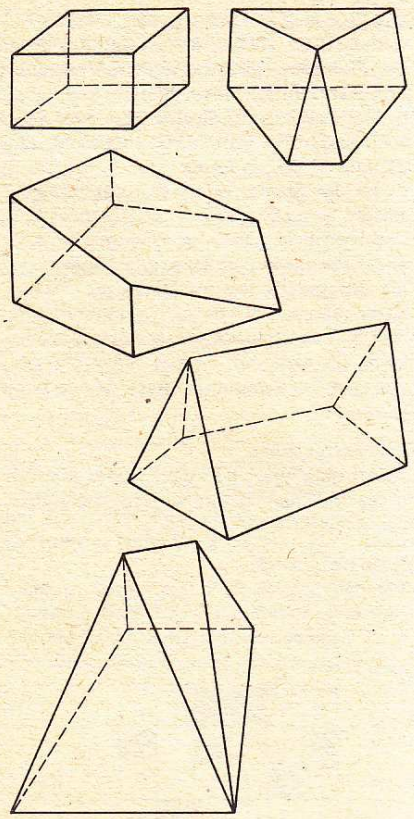


Bild 3



▲3▲ P sei ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten. f_3, f_4, ... ist die Anzahl der Flächen mit genau 3, 4, ... Ecken. Dann kann man die Summe der Flächenwinkel $\sum\alpha$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}\sum\alpha &= \pi f_3 + 2\pi f_4 + 3\pi f_5 + \ldots\\ &= \pi\cdot(f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots)\\ &= \pi\cdot((3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + \ldots)\\ &\quad - 2(f_3 + f_4 + f_5 + \ldots))\\ &= \pi\cdot(2k - 2f)\\ &= 2\pi(k - f).\end{aligned}$$

▲4▲ Wir versuchen im folgenden ein Tetraeder $ABCS$ zu konstruieren, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels ist.

In einem 1. Fall nehmen wir an, daß alle stumpfen Winkel, die am Tetraeder $ABCS$ vorkommen, an genau einer Ecke liegen. Dann können aber höchstens drei Kanten als Schenkel von stumpfen Winkeln auftreten, und damit erfüllt ein solches Tetraeder nicht die gestellten Anforderungen.

In einem 2. Fall, nehmen wir an, daß es im gesuchten Tetraeder an genau zwei Ecken stumpfe Winkel gibt. Dann gibt es höchstens fünf Kanten, die Schenkel eines stumpfen Winkels sind, denn die beiden betrachteten Ecken sind durch genau eine Kante verbunden.

Also müssen bei dem gesuchten Tetraeder an wenigstens drei Ecken stumpfe Winkel liegen.

Nehmen wir nun in einem 3. Fall an, daß an genau drei Ecken des gesuchten Tetraeders stumpfe Winkel liegen. A, B und C seien diese drei Ecken. Dann muß jedes der Dreiecke ABS, BCS und CAS genau einen stumpfen Winkel enthalten, da AS, BS und CS Kanten von stumpfen Winkeln sein sollen. Außerdem kann das Dreieck ABC noch stumpfwinklig sein.

Ist $\measuredangle SAB$ stumpf, so folgt, daß dann auch $\measuredangle SBC$ und $\measuredangle SCA$ stumpf sein müssen. Durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung folgt $|SC| > |BS| > |AS| > |SC|$, womit sich ein Widerspruch zu $|SC| = |SC|$ ergibt. Folglich kann auch dieser Fall nicht auftreten.

Als letzte Möglichkeit für unser gesuchtes Tetraeder bleibt im 4. Fall, daß an jeder Tetraederecke ein stumpfer Winkel liegt. Da aber ein Tetraeder genau vier Flächen hat, folgt sofort, daß es im letzten Fall genau vier stumpfe Winkel gibt.

Ist $\measuredangle ASB$ stumpf, so gibt es für die Lage des stumpfen Winkels an der Ecke A zwei Möglichkeiten: entweder ist $\measuredangle SAC$ oder $\measuredangle CAB$ stumpf. Ist $\measuredangle ASB$ und $\measuredangle SAC$ stumpf, so folgt sofort, daß entweder $\measuredangle SBC$ und $\measuredangle ACB$ (Bild 4) oder $\measuredangle ABC$ und $\measuredangle BCS$ (Bild 5) ebenfalls stumpf sind. Ist $\measuredangle ASB$ und $\measuredangle CAB$ stumpf, so folgt sofort, daß auch $\measuredangle SBC$ und $\measuredangle ACS$ stumpf sind (Bild 6).

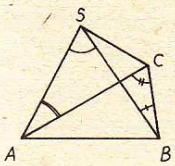


Bild 4

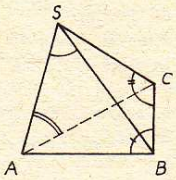
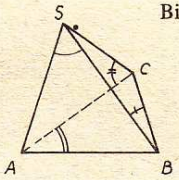


Bild 5

Bild 6



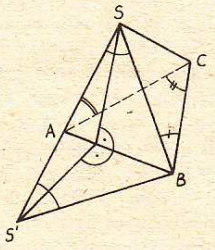
Bei der Verteilung der stumpfen Winkel nach Bild 5 folgt durch mehrmaliges Anwenden der Dreiecksungleichung, daß $|AB| > |BS| > |CS| > |AC| > |AB|$ gilt.

Bei der Verteilung nach Bild 6 folgt analog, daß $|AB| > |AS| > |SC| > |BC| > |AB|$ gilt.

In beiden Fällen entsteht also ein Widerspruch zu $|AB| = |AB|$, und folglich können diese beiden Verteilungsmöglichkeiten nicht auftreten.

Nun bleibt noch die Verteilungsmöglichkeit der stumpfen Winkel nach Bild 4 zu untersuchen. Hier hilft uns die Anwendung der Dreiecksungleichung nicht weiter.

Bild 7



Um festzustellen, daß auch diese Verteilungsmöglichkeit nicht zu realisieren ist, klappen wir das Dreieck ABS in die Ebene des Dreiecks ABC. S' sei das Bild von S (Bild 7). Es ist klar, daß $|\measuredangle SAC| < |\measuredangle S'AC|$ und $|\measuredangle SBC| < |\measuredangle S'BC|$ ist.

Folglich gilt

$|\measuredangle SAC| + |\measuredangle SBC| < |\measuredangle S'AC| + |\measuredangle S'BC|$. (1)

Weil das Dreieck ACB bei C stumpfwinklig ist, gilt

$|\measuredangle CAB| + |\measuredangle CBA| < 90°$. (2)

Weil das Dreieck ASB bei S stumpfwinklig ist, gilt

$|\measuredangle SAB| + |\measuredangle SBA| < 90°$, bzw.

$|\measuredangle S'AB| + |\measuredangle S'BA| < 90°$. (3)

Aus (2) und (3) folgt

$|\measuredangle S'AC| + |\measuredangle S'BC| = |\measuredangle S'AB| + |\measuredangle CAB| + |\measuredangle S'BA| + |\measuredangle CBA| < 180°$.

Dieses ergibt zusammen mit (1), daß $|\measuredangle SAC| + |\measuredangle SBC| < 180°$ ist. Damit entsteht aber ein Widerspruch zu der Tatsache, daß die Summe von zwei stumpfen Winkeln stets größer als 180° ist.

Folglich gibt es kein Tetraeder, bei dem jede Kante Schenkel eines stumpfen Winkels ist.

Lösungen zu: Gerechte und ungerechte Würfelspiele, Teil 1
Heft 3/90

▲1▲ a) Beispielsweise: V erhält im Falle des Gewinns von Z 5 Chips, zahlt aber andernfalls an ihn 7 Chips.
b) $a : b = 1 : 3$

▲2▲ a) 1(36)
b) nicht möglich: 2,5; 5,5; 7;
unterschiedlich möglich:
2(2, 1, 1; 2, 2, 2); 4(4, 1, 1; 4, 2, 2; 4, 3, 3; 4, 4, 4)
c) 9(3, 3, 2; 5, 3, 2; 5, 5, 2; 4, 4, 3; 4, 5, 3; 5, 5, 3; 5, 5, 4; 5, 6, 4; 6, 6, 5)

▲3▲ 31

▲4▲ Bei allen

▲5▲ $Q_{V/N}{}^{(2)} = 585 : 545 = 1{,}073\,4$;
$Q_{V/N}{}^{(3)} = 21\,225 : 20\,280 = 1{,}046\,6$

Teil 2

▲6▲ $Q_{Z/G}{}^{(2)} = 612 : 567 = 1{,}079\,4$;
$Q_{F/G}{}^{(2)} = 612 : 567 = 1{,}079\,4$
$Q_{F/Z}{}^{(2)} = 688 : 536 = 1{,}283\,6$

▲7▲ Da Vergleich mit dem Normalwürfel stets 1 ergibt (Aufgabe 3), genügen wegen der 31 ungewöhnlichen Würfel (Aufgabe 2) $31 \cdot 30 : 2 = 465$ Berechnungen.

▲8▲ a) Die Nummern lauten, im Bild 5 bei Nr. 1 beginnend in mathematisch positivem Drehsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn):
1; 5; 6(F); 9; 13; 15; 17; 18(V); 19(Z); 22; 26; 29; 30; 31; 32(G)
b) Die Nummern sind die gleichen.

▲9▲ a) $Q_{1/F} = Q_{1/6} = 18 : 12 = 1{,}5$;
$Q_{Z/1} = Q_{19/1} = 18 : 12 = 1{,}5$
b) Mit den Bezeichnungen von Aufgabe 7a: Nr. 18 und Nr. 32 sowie Nr. 30 und Nr. 32 ($Q_{18/32} = Q_{32/30} = 15 : 6 = 2{,}5$);
ferner ist $Q_{18/30} = 25 : 11 = 2{,}27$.
c) In keiner Kette: 5; 9; 13; 22;
in jeder Kette: 1; 6; 19
d) 1 – 19 – 26 – 29 – 18 – 6; 1 – 19 – 26 – 32 – 17 – 6; 1 – 19 – 26 – 32 – 18 – 6; 1 – 19 – 30 – 15 – 18 – 6; 1 – 19 – 30 – 29 – 18 – 6.