

Papierfalten auch im Mathematikunterricht

– Begründungen und Beispiele –

Michael Schmitz

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Fakultät für Mathematik und Informatik
Abteilung Didaktik

michael.schmitz@uni-jena.de
www.mathegami.de (Bild1 Bild2)

46. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik
Weingarten 2012

Was ist Origami?

Eine moderne Erklärung, was Origami ist, stammt von Kunihiko Kasahara:

»Origami ist ein traditionelles Faltspiel, in dem

- bildnerisch-ästhetische,
- funktionelle und
- geometrisch-mathematische Prinzipien zusammenfließen.«

(Kunihiko Kasahara: Origami figürlich und geometrisch. Augustus 2000.)

- es hervorragende Möglichkeiten gibt, »eine handwerkliche Tätigkeit mit den geistigen Erfordernissen beim Erlernen und im Umgang mit der Mathematik hilfreich zu verbinden«

(Flachsmeyer, Jürgen: Mathematikdidaktische Belange des Origami. Math. Semesterberichte 56, 2009.)

Was ist Origami?

Eine moderne Erklärung, was Origami ist, stammt von Kunihiko Kasahara:

»Origami ist ein traditionelles Faltspiel, in dem

- bildnerisch-ästhetische,
- funktionelle und
- geometrisch-mathematische Prinzipien zusammenfließen.«

(Kunihiko Kasahara: Origami figürlich und geometrisch. Augustus 2000.)

- es hervorragende Möglichkeiten gibt, »eine handwerkliche Tätigkeit mit den geistigen Erfordernissen beim Erlernen und im Umgang mit der Mathematik hilfreich zu verbinden«

(Flachsmeyer, Jürgen: Mathematikdidaktische Belange des Origami. Math. Semesterberichte 56, 2009.)

Die Kunst des Faltens von Papier

Das Falten von Papier verbinden wir sehr oft mit der alten japanischen Tradition des Origami.

Dennoch gibt es in anderen Ländern, speziell in Deutschland, ebenfalls Ausgangspunkte für das Falten von Papier.

Wir denken hier speziell an Friedrich Fröbel (1782 - 1852), der besonders den pädagogischen Wert hervorhob und das Papierfalten in seine Kindergartenausbildung integrierte.

Um 1890 führte die japanische Regierung das System der Vorschulerziehung ein, dass sich an westlichen Vorbildern orientierte. Sie übernahmen die Praktiken Fröbels, speziell das schematische Papierfalten, und richteten Kindergärten ein. Durch die Einführung dieses westlichen Systems konnte die eigene japanische Tradition des Papierfaltens gestärkt werden und führte zu einer breiten Basis für Origami in Japan.

Origami im Mathematikunterricht

Das Falten von Papier unterstützt:

- **Beobachten, Vor- und Nachmachen**
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration

Origami im Mathematikunterricht

Das Falten von Papier unterstützt:

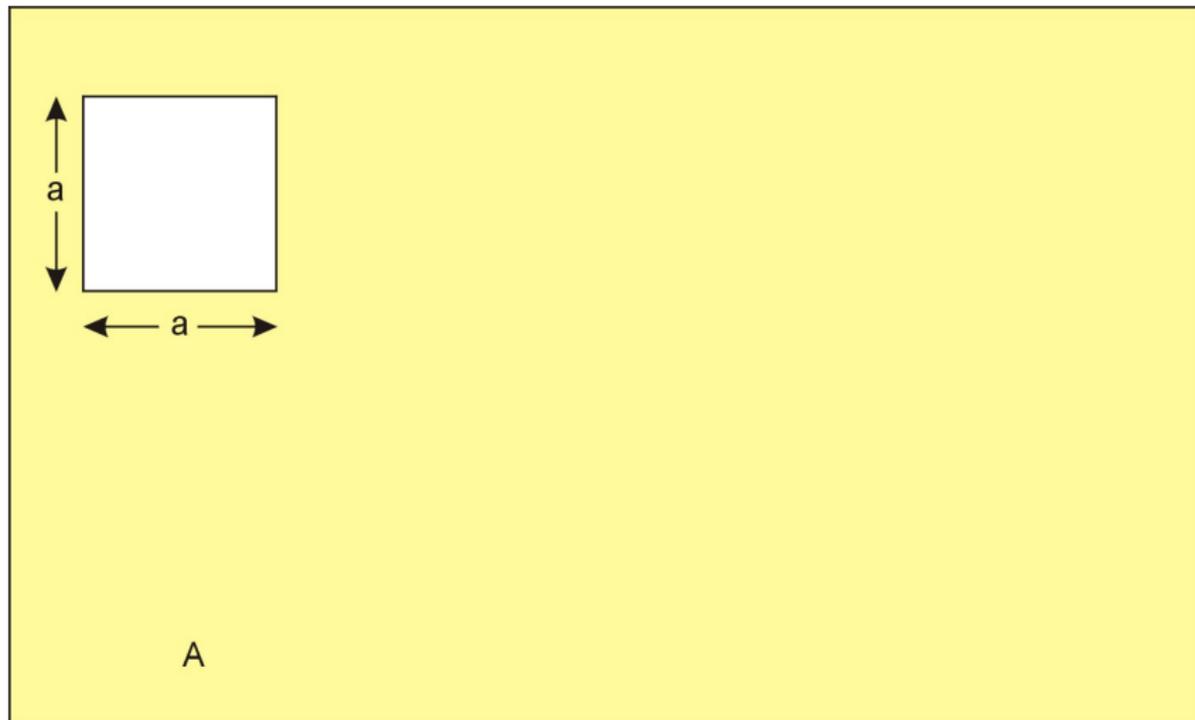
- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration

Origami im Mathematikunterricht

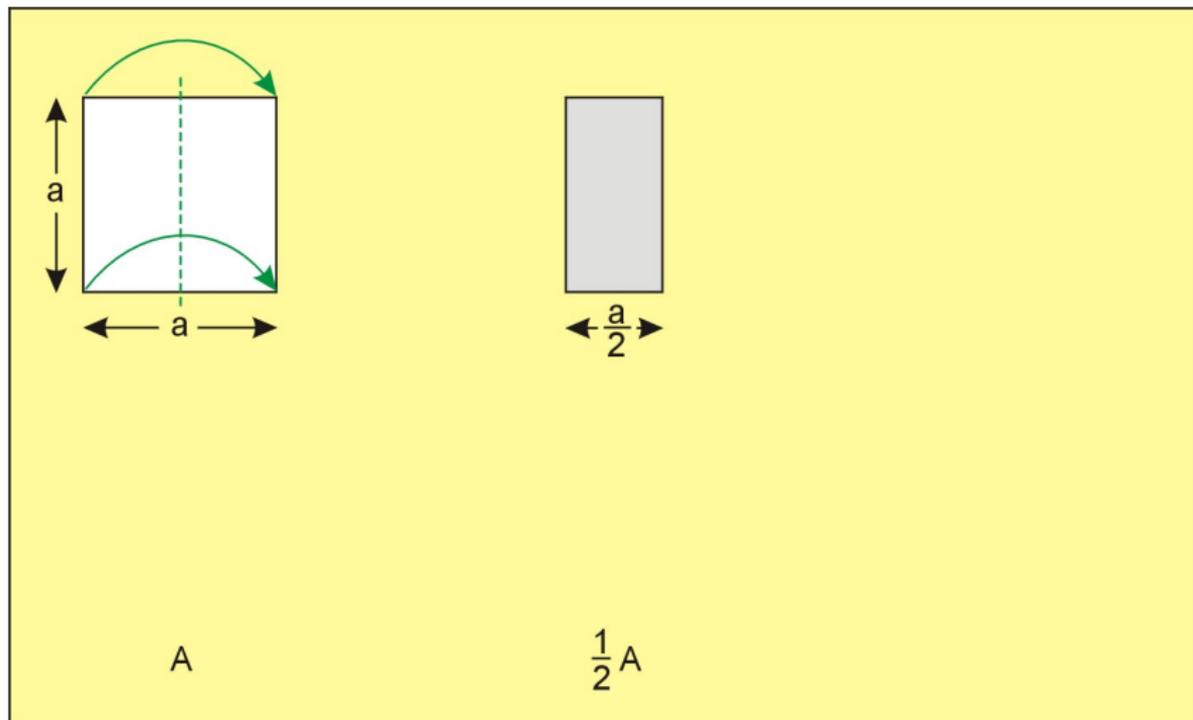
Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration

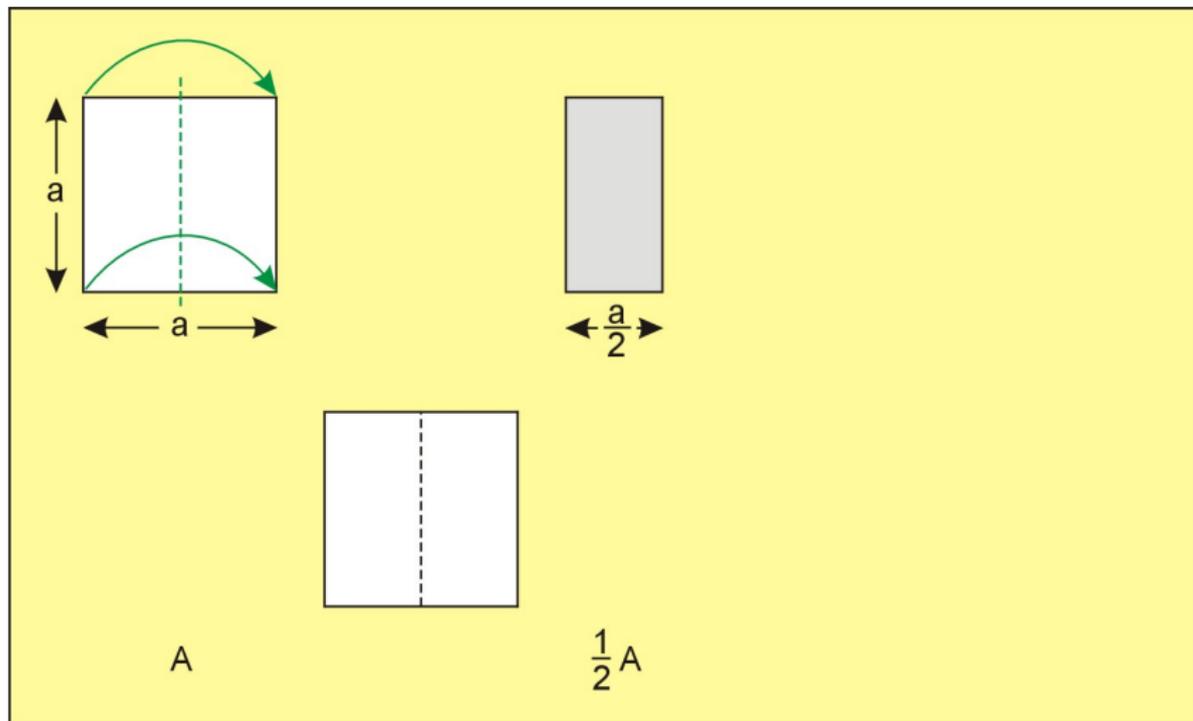
Ein Quadrat



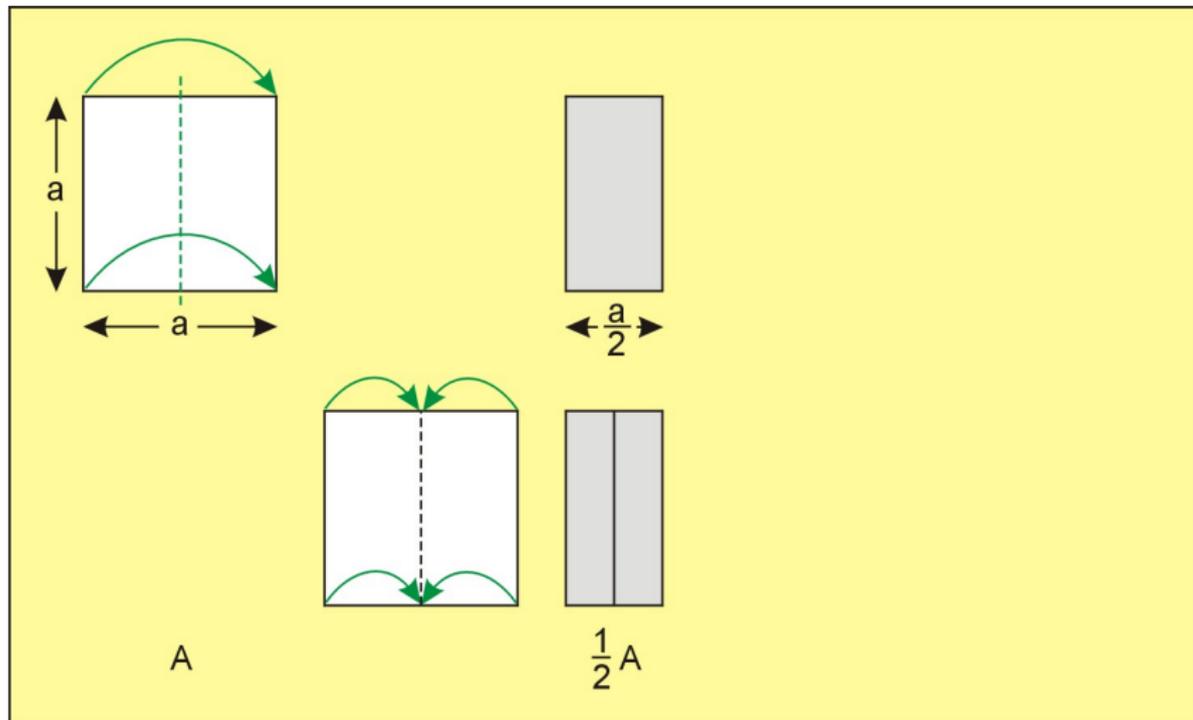
Ein Quadrat



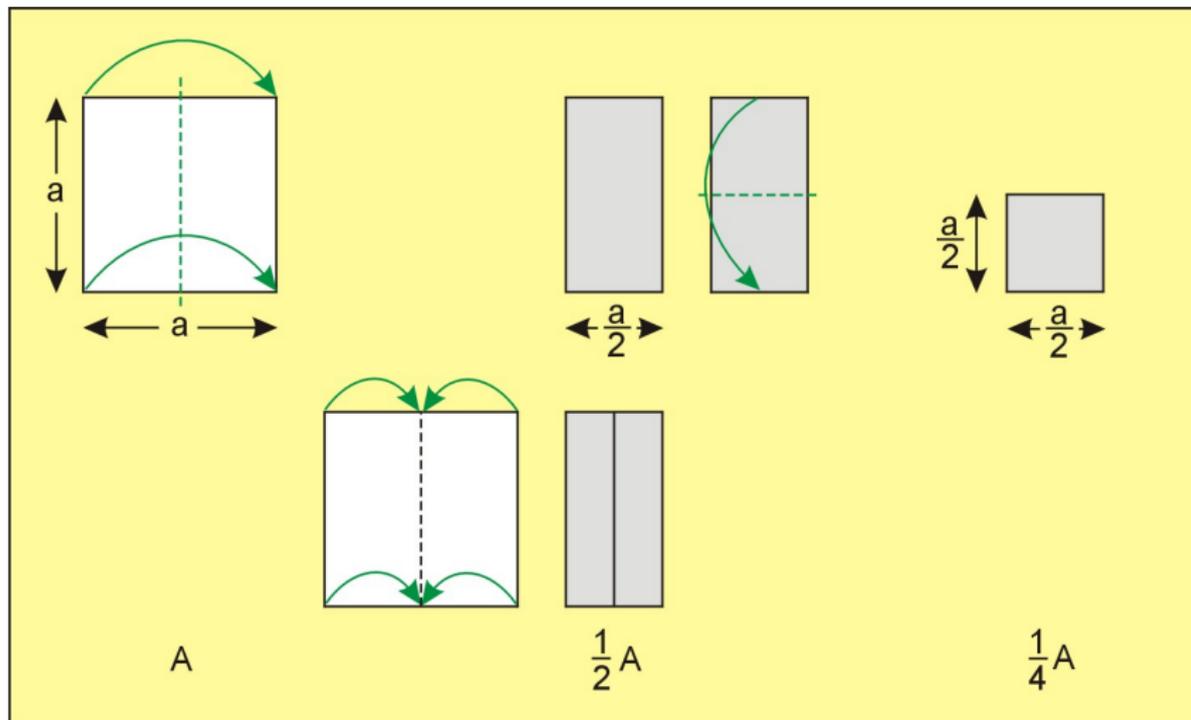
Ein Quadrat



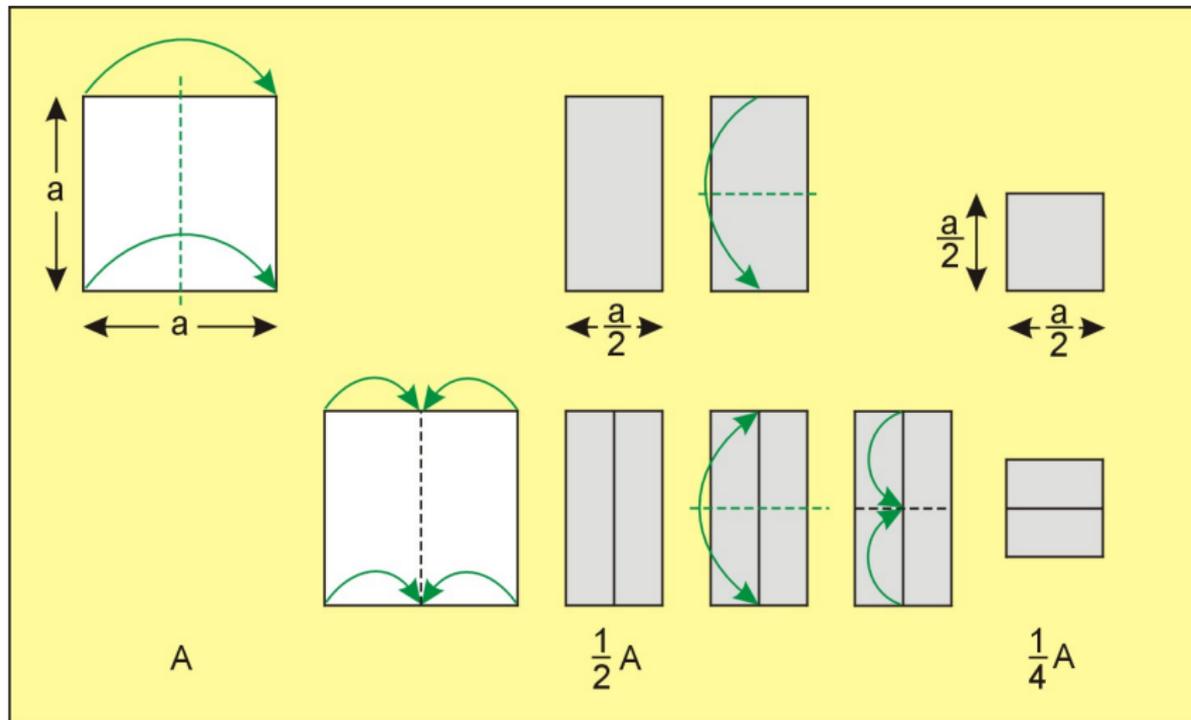
Ein Quadrat



Ein Quadrat



Ein Quadrat

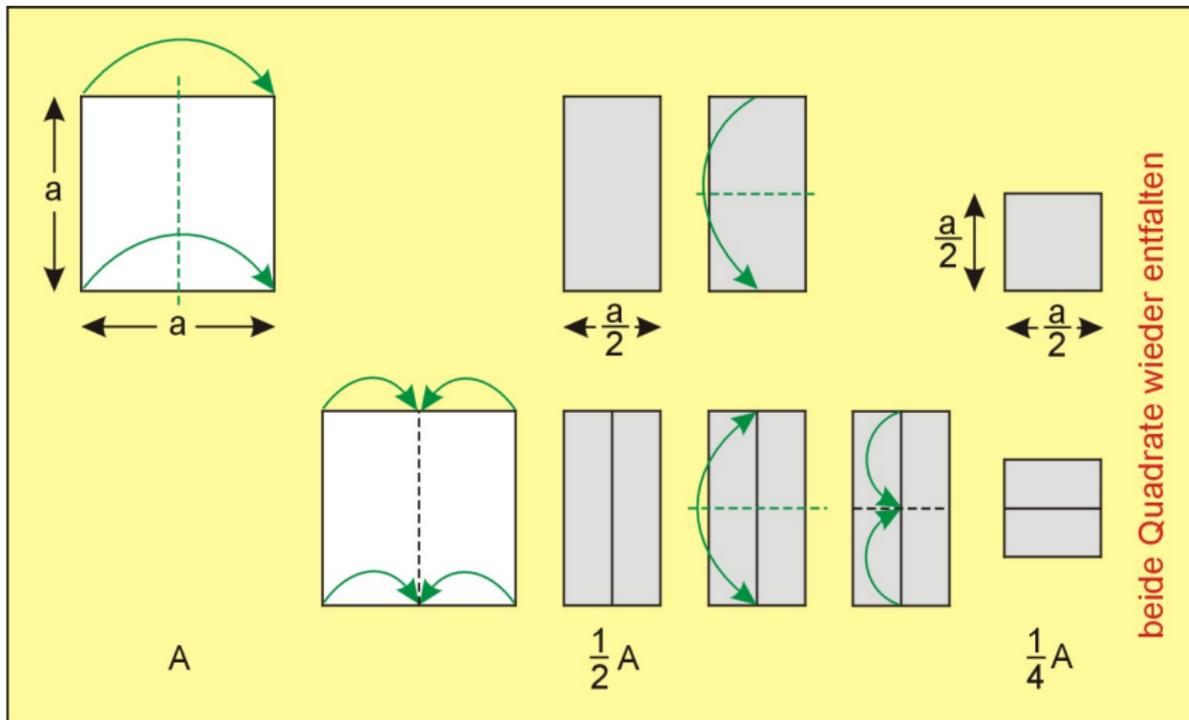


Origami im Mathematikunterricht

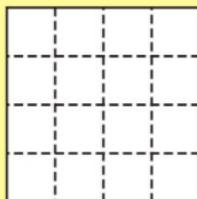
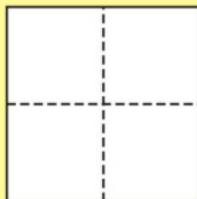
Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration
- Verbesserung der »mathematischen Sprache«

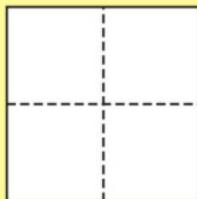
Ein Quadrat



Ein Quadrat

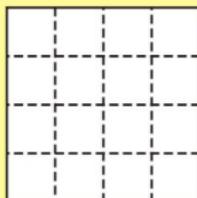


Kombinatorisches Zählen



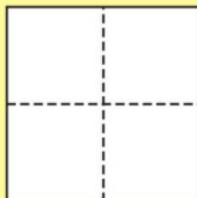
Wie viele
Quadrate?

5



1 x 1:	16
2 x 2:	9
3 x 3:	4
4 x 4:	<u>1</u>
	30

Kombinatorisches Zählen

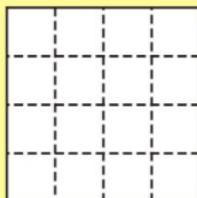


Wie viele
Quadrate?

5

Wie viele
Rechtecke, die **keine** Quadrate sind?

4



1 x 1: 16
2 x 2: 9
3 x 3: 4
4 x 4: 1
30

1 x 2: 12	3 x 1: 8
1 x 3: 8	3 x 2: 6
1 x 4: 4	3 x 4: 2
2 x 1: 12	4 x 1: 4
2 x 3: 6	4 x 2: 3
2 x 4: 3	4 x 3: 2

70

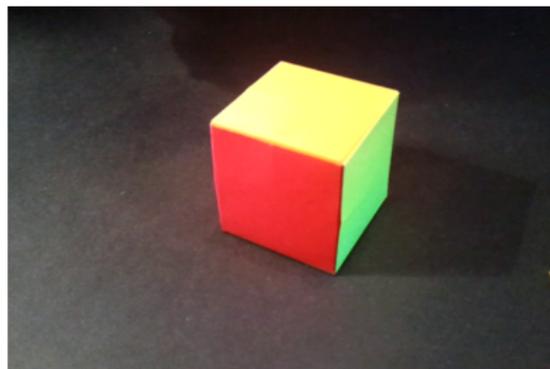
Vom Quadrat zum Würfel

Ausgehend von dem eben zusammengefalteten Quadrat falten wir Module für einen Würfel.

Die Seitenteile (Video 1)



Der Würfel (Video 2)



Origami im Mathematikunterricht

Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration
- Verbesserung der »mathematischen Sprache«
- Von der Hand in den Kopf
- Raumvorstellung entwickeln

Origami im Mathematikunterricht

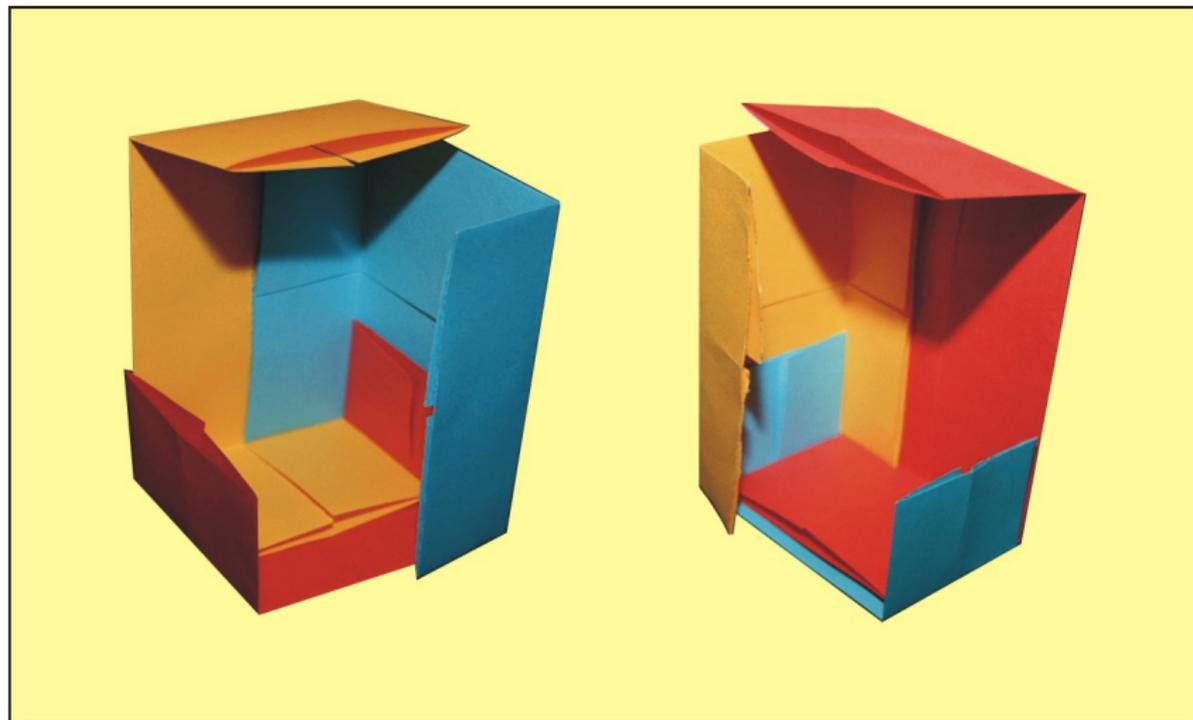
Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration
- Verbesserung der »mathematischen Sprache«
- Von der Hand in den Kopf
- Raumvorstellung entwickeln

Und Quader?

Kann man, ähnlich zu den Würfelmodulen, auch Module erfinden, mit denen man einen Quader bauen kann?

Quader



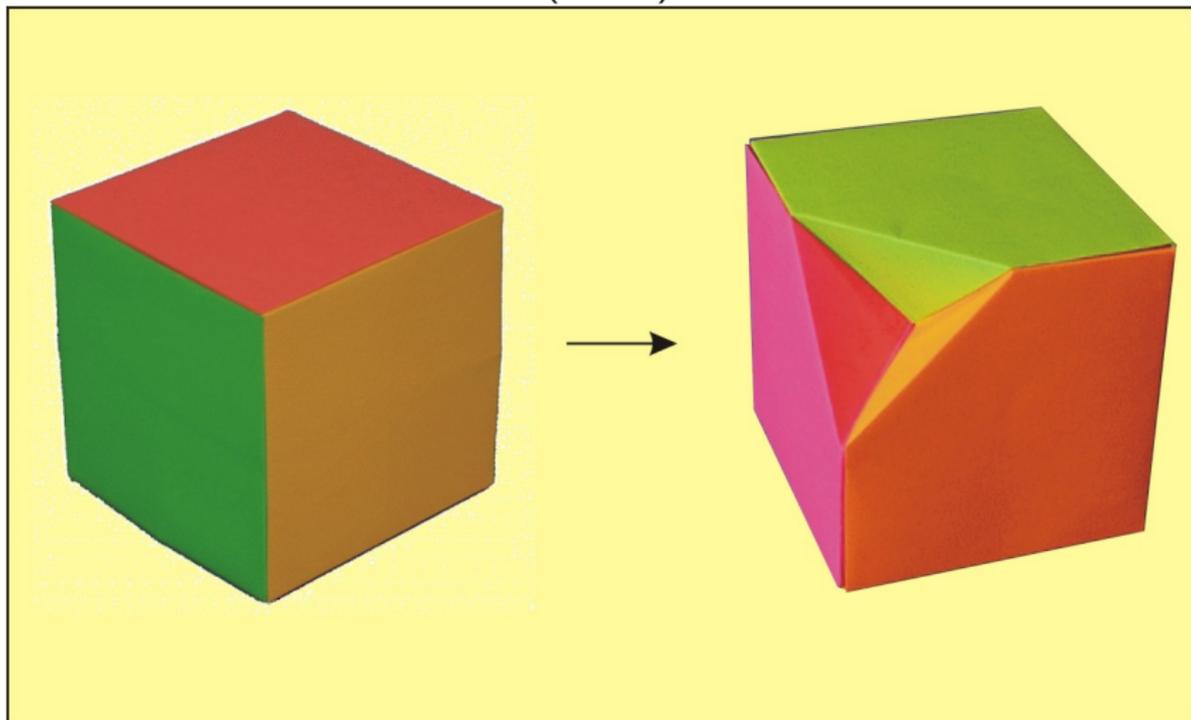
Origami im Mathematikunterricht

Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration
- Verbesserung der »mathematischen Sprache«
- Von der Hand in den Kopf
- Raumvorstellung
- **Kreativität, Experimentieren**

Beispiel 1: Körperberechnung

Wir verändern unseren Würfel. (Video)

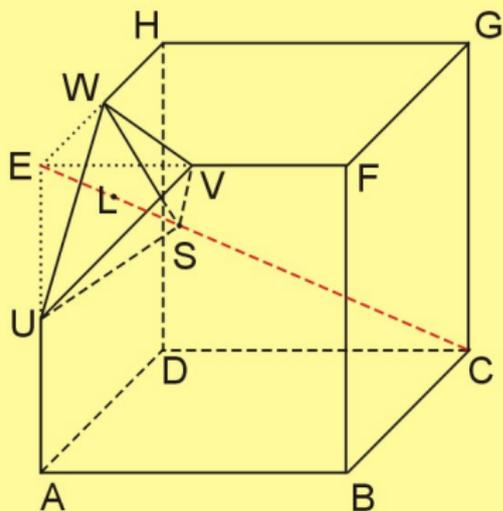
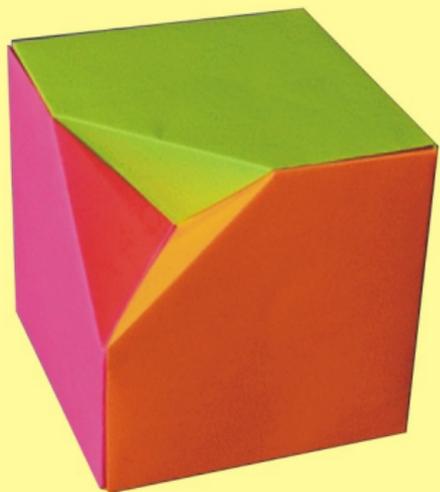


Beispiel 1: Körperberechnung

Der Kolumbuswürfel



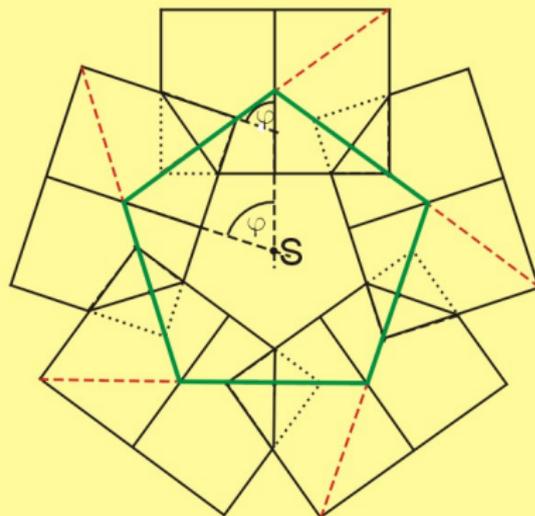
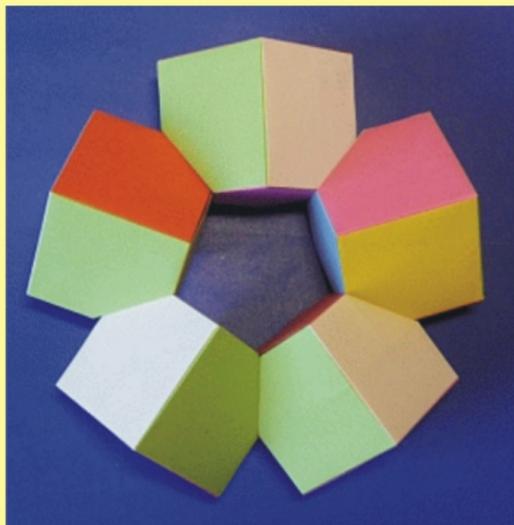
Beispiel 1: Körperberechnung



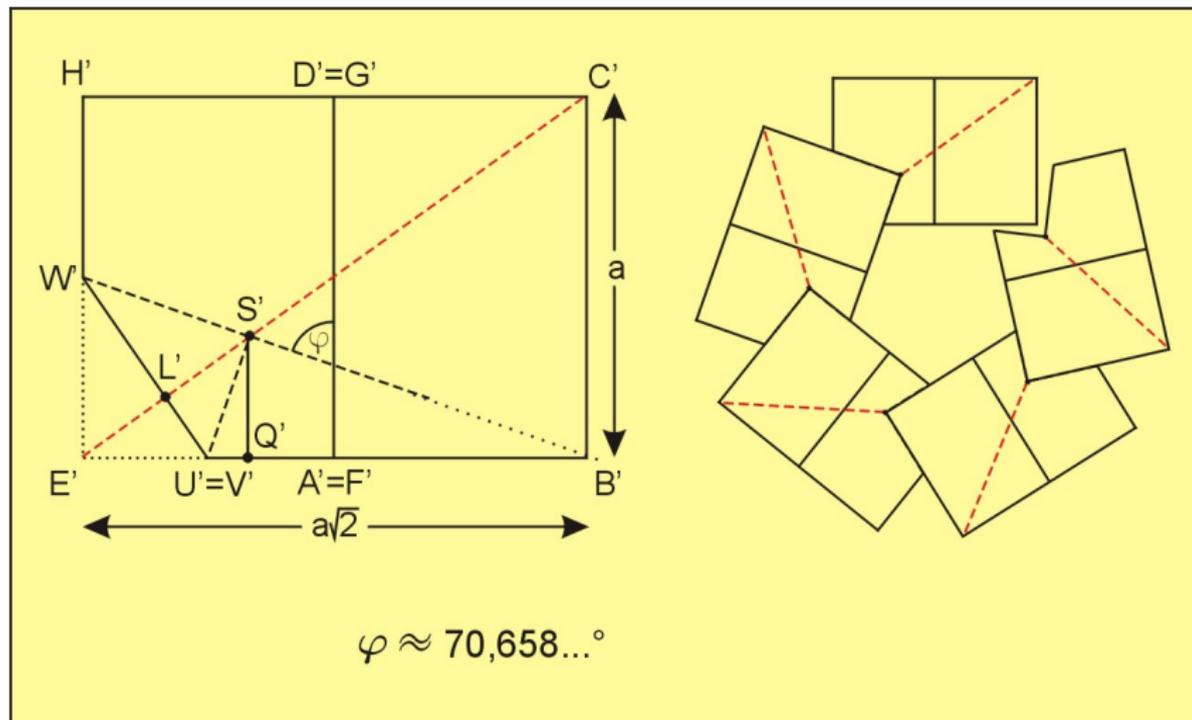
$$A = 6a^2$$

$$V = \frac{23}{24} a^3$$

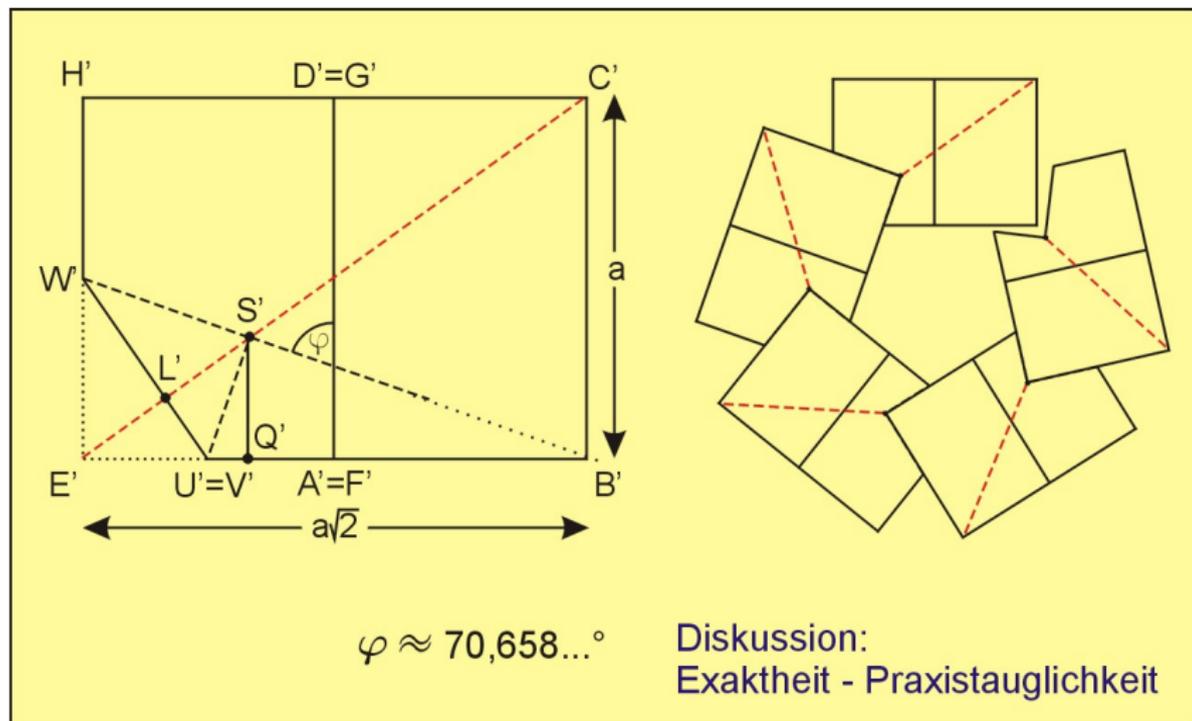
Beispiel 1: Körperberechnung



Beispiel 1: Körperberechnung

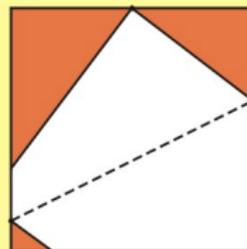
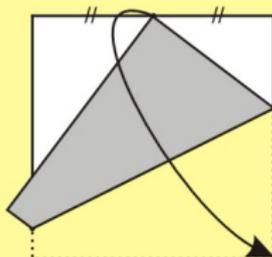
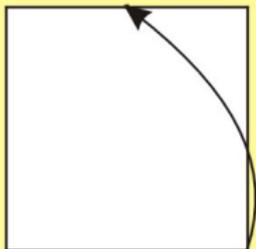


Beispiel 1: Körperberechnung



Beispiel 2: Der Satz von Haga

Kazuo Haga

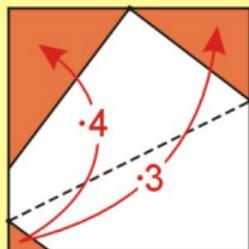


Übung zur Ähnlichkeit und
zum Satz des Pythagoras

Die markierten Dreiecke

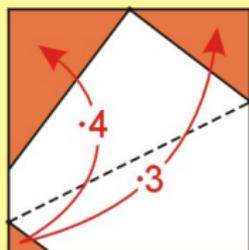
- sind ähnlich zueinander,
- sind pythagoreische Dreiecke.

Beispiel 2: Der Satz von Haga - eine Ergänzung

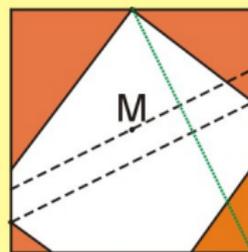
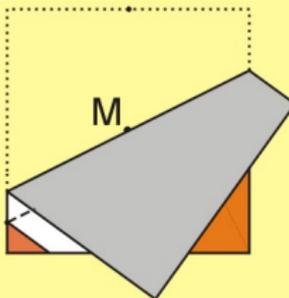
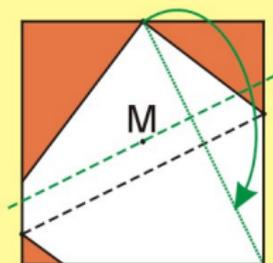


In der vierten Ecke (rechts unten) fehlt ein Dreieck, das den Ähnlichkeitsfaktor 2 bezüglich des kleinen Dreiecks hat.

Beispiel 2: Der Satz von Haga - eine Ergänzung



In der vierten Ecke (rechts unten) fehlt ein Dreieck, das den Ähnlichkeitsfaktor 2 bezüglich des kleinen Dreiecks hat.

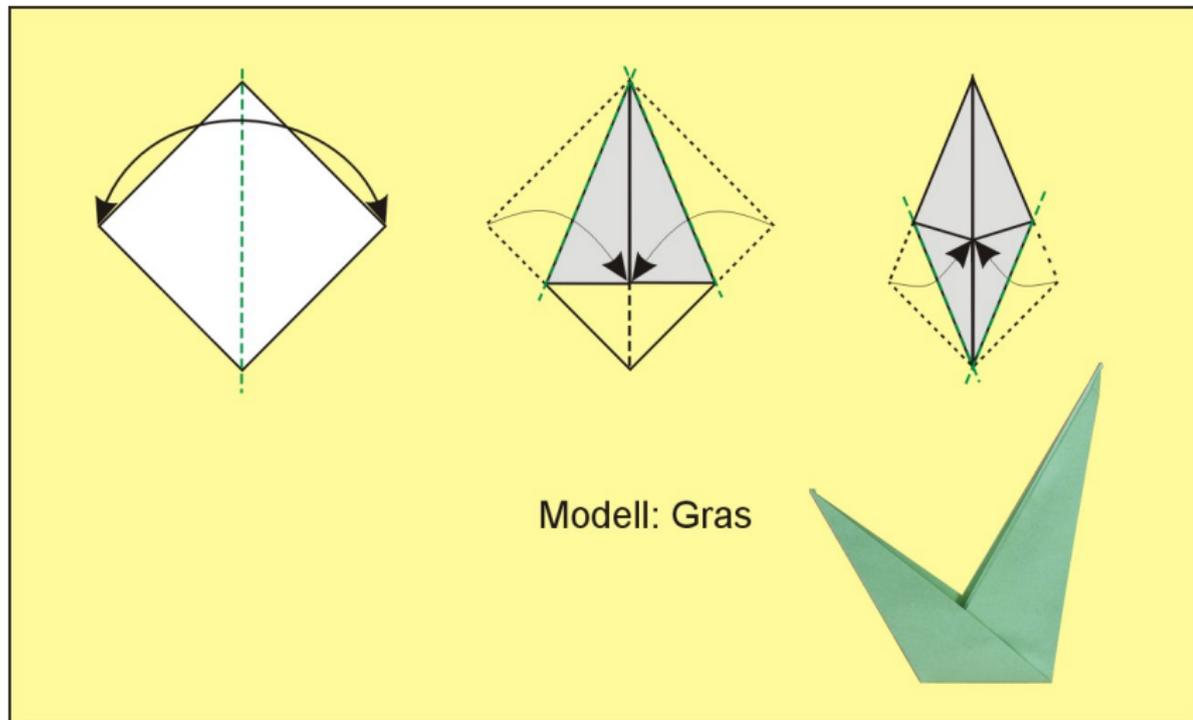


Origami im Mathematikunterricht

Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration
- Verbesserung der »mathematischen Sprache«
- Von der Hand in den Kopf
- Raumvorstellung
- Kreativität, Experimentieren
- mit **Mathematik experimentieren**

Beispiel 3: Kongruenz



Beispiel 3: Kongruenz



Was kann daraus
werden?



Beispiel 3: Kongruenz

Und nun doch noch Kongruenz!



Die beiden sichtbaren Dreiecke sind kongruent zueinander.

Beispiel 4: Schmetterlingsball

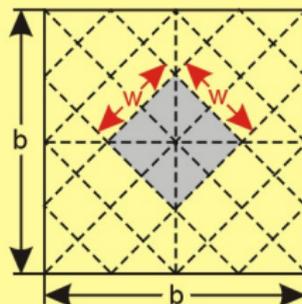
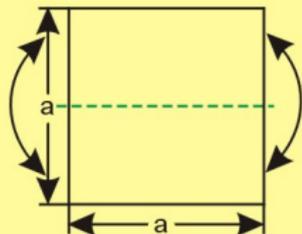
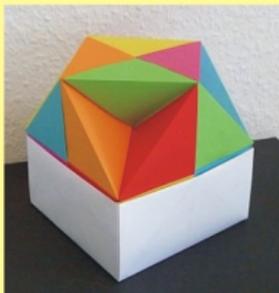
The diagram illustrates the construction of a butterfly ball through several stages:

- Step 1:** A square with side length a . A horizontal dashed green line is drawn across the middle. Curved arrows on the left and right sides indicate a 90-degree rotation.
- Step 2:** The square is rotated 90 degrees, labeled "wenden". The dashed lines are now vertical and horizontal.
- Step 3:** The square has dashed diagonal lines and a horizontal dashed line. Curved arrows indicate the next folding steps.
- Step 4:** The square has curved fold lines along the sides and a horizontal dashed line. Curved arrows indicate the final folding.

Below the diagrams are three photographs:

- A single yellow butterfly, labeled "12 x".
- Two butterflies, one red and one green, shown together.
- A completed butterfly ball, a spherical structure composed of many colorful butterfly units.

Beispiel 4: Schmetterlingsball

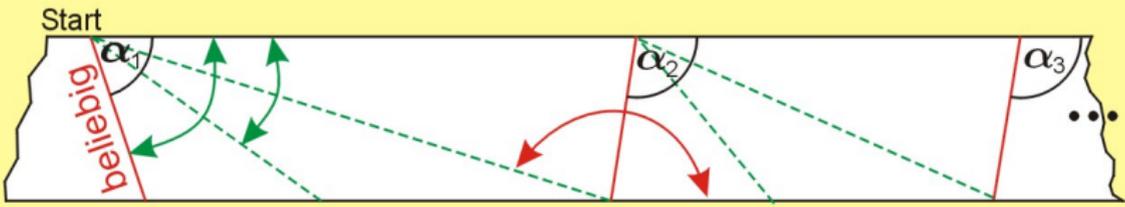


$$b = 2a\sqrt{2}$$

Warum heißt der Schmetterlingsball Schmetterlingsball? (Video)

Beispiel 5: Regelmäßiges Siebeneck

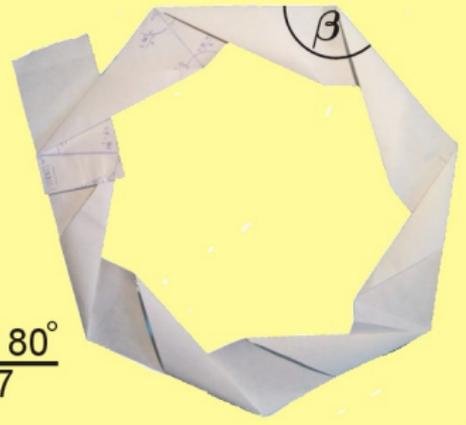
Start



$$\alpha_n = 4 \cdot 180^\circ \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{3k}} + \frac{\alpha_1}{8^{n-1}}$$

↓

$$\frac{1}{7}$$

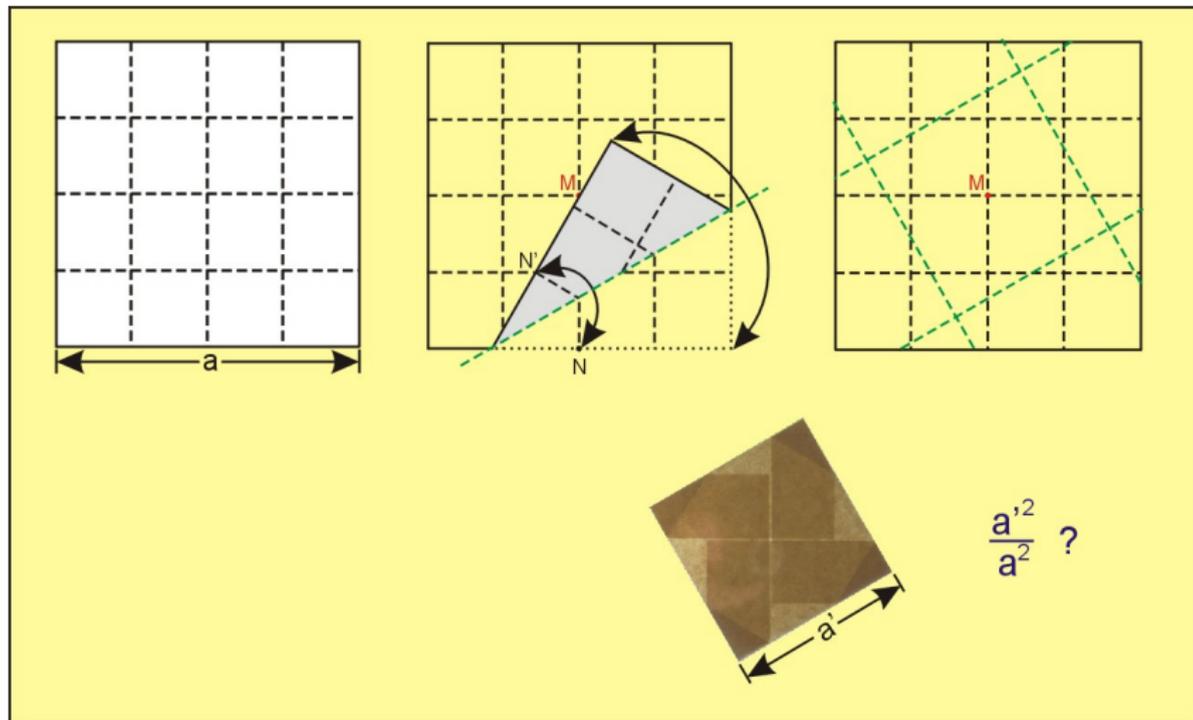
$$\alpha = \frac{4 \cdot 180^\circ}{7} \qquad \beta = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{7}$$


Origami im Mathematikunterricht

Das Falten von Papier unterstützt:

- Beobachten, Vor- und Nachmachen
- Sorgfalt, Genauigkeit, Sauberkeit, Ausdauer
- stärken der Konzentration
- Verbesserung der »mathematischen Sprache«
- Von der Hand in den Kopf
- Raumvorstellung
- Kreativität, Experimentieren
- mit Mathematik experimentieren
- gemeinsames Arbeiten

Ein Päckchen (Hausaufgabe)



Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- hilft mit, wichtige Persönlichkeitseigenschaften und Kompetenzen zu entwickeln
- unterstützt die Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- bietet weitere Übungsmöglichkeiten zu vielen Inhaltsbereichen
- ermöglicht Erfahrungen beim Problemlösen und regt zum Experimentieren mit Mathematik an
- unterstützt die Entwicklung von Kreativität
- bietet Möglichkeiten zum differenzierten Arbeiten im Mathematikunterricht
- macht Spaß!

Papierfalten im Mathematikunterricht

- ...
 - macht Spaß!
-
- Ausblick
 - Papierfalten kann (in Jena) im Praxissemester auch als Praktikumsschwerpunkt gewählt werden
 - interessant wären Untersuchungen zur Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens



Flachsmeyer, Jürgen.

Mathematikdidaktische Belege des Origami.

Mathematische Semesterberichte, 56, Heft 2, 2009,
S. 201 - 214.



Lister, David.

Die Geschichte des Papierfaltens. Eine deutsche Perspektive.

Der Falter,

Nr. 35 - April 2003 (Teil 1), Nr. 37 - April 2004 (Teil 2).

[http://www.papierfalten.de/documents/
papierfalten-deutschland.pdf](http://www.papierfalten.de/documents/papierfalten-deutschland.pdf).



Schmitz, Michael.

www.mathegami.de